Sistemas de Ecuaciones Exponenciales

(Castelli Horacio P.)

Un sistema de ecuaciones exponenciales, es aquel donde las incógnitas aparecen en los exponentes. Para resolverlo, debemos buscar que las bases sean iguales o aplicar algún cambio de variable (sustitución).

1) Comenzando.

a) $\begin{cases} 2^x \cdot 2^y = 32 \\ \dfrac{3^x}{3^y} = 3 \end{cases}$

R: $x = 3$, $y = 2$

Derecha: Resultado Primera Ecuación. Derecha: Resultado Segunda Ecuación.	$32 = 2^5$ $3 = 3^1$	Expresamos los números de la derecha (resultados) como potencias de las bases de la parte; izquierda de la ecuación dada.
	$2^{x+y} = 2^5$ $3^{x-y} = 3^1$	Izquierda: Aplicamos propiedad del producto de potencias de igual base. Derecha: usamos las potencias (resultado del paso anterior)
	$x + y = 5$ $x - y = 1$	**Ecuación formada con exponentes** Dado que las bases (en la primera y segunda ecuación) son iguales, los exponentes también deben ser iguales. Entonces

Ahora solo queda resolver el sistema de ecuaciones, por el método que prefieras (igualación, sustitución o el que mejor sepas).

b) $\begin{cases} 2^x \cdot 2^y = 32 \\ \dfrac{2^x}{2^y} = 2 \end{cases}$

Izquierda: En ambas ecuaciones aplica propiedades de producto y/o cociente de potencias.
Derecha: Expresa los valores como potencias

R: $x = 3$, $y = 2$

c) $\begin{cases} 5^x \cdot 5^y = 625 \\ 5^{x-y} = 25 \end{cases}$

R: $x = 3$, $y = 1$

d) $\begin{cases} 2^{x+y} = 16 \\ 3^{y-x} = 9 \end{cases}$

Para resolver, iguala las bases.

R: $x = 1$, $y = 3$

e) $\begin{cases} 10^{x-y} = 100 \\ 10^{y+x} = 10000 \end{cases}$

Para resolver, iguala las bases.

R: $x = 3$, $y = 1$

f) $\begin{cases} 3^x = 9^y \\ x + y = 3 \end{cases}$

Resuelve por sustitución.

R: $x = 2$, $y = 1$

$3^x = 9^y$ $x + y = 3$	Sistema de ecuaciones Planteado.
$3^x = 9^y$ $x = 3 - y$	Despejamos "x" de la segunda ecuación. Esta la usaremos mas adelante.

Sistemas de Ecuaciones Exponenciales

(Castelli Horacio P.)

	$3^{3-y} = 9^y$	<u>Izquierda</u>: Reemplazamos en la primera ecuación el valor de "**x**". Y nos quedamos con solo una ecuación.
	$3^{3-y} = 3^{2y}$	<u>Derecha</u>: Expresamos el 9 (nueve) como potencia de 3, **para igualar las bases**.
	$3 - y = 2y$	<u>Porque las bases son iguales</u>: podemos tomar los exponentes e igualarlos, formando la nueva ecuación a resolver.
	$3 = 2y + y$	Despejamos
	$3 = 3y$	Despejamos
Valor de "**y**"	$1 = y$	Encontramos valor de "y", pero ahora falta el valor de x
	$x = 3 - y$	Ahora tomamos la ecuación donde habíamos despejado "x"
	$x = 3 - 1$	Reemplazamos "y" por el valor de "y" que encontramos antes. Resolvemos
Valor de "**x**"	$x = 2$	Encontramos valor de "x". Terminamos

g) $\begin{cases} 5^x + 5^y = 30 \\ 5^{x+y} = 125 \end{cases}$

Esto es como la ensalada de fruta.
De todo un poco.

R₁: **(1 , 2)**
R₂: **(2 , 1)**

$5^x + 5^y = 30$ $5^x \cdot 5^y = 125$	Primero trabajamos en la segunda ecuación. Propiedad del producto de potencias de igual base.

Ahora resolveremos el sistema de ecuaciones por el método de sustitución. Analiza bien.

$5^x = 30 - 5^y$ $5^x \cdot 5^y = 125$		Despejamos "5^x" de la primera ecuación.
$(30 - 5^y) \cdot 5^y = 125$		Reemplazamos en la segunda ecuación lo que encontramos al despejar "5^x" de la primera ecuación.
$30 \cdot 5^y - (5^y)^2 = 125$		<u>Izquierda</u>: Aplicamos propiedad distributiva.
$-t^2 + 30t - 125 = 0$		Realizamos una sustitución $t = 5^y$. Ordenamos la ecuación.
$a = -1$ $b = 30$ $c = -125$		Reemplazamos los coeficientes en formula de Bhaskara y Resolvemos para encontrar los valores de "t".
$t_1 = 5$	$t_2 = 25$	Valores intermedios encontrados.

$$x = \frac{-b \pm \sqrt{b^2 - 4ac}}{2a}$$

En este punto, ya se ha resuelto la ecuación sustituida, pero nos falta revertir la sustitución, lo que resulta muy simple. Primero dijimos que 5^x = **t**. Encontramos los valores de "**t**", ahora simplemente re escribimos, pero reemplazando "t" por sus valores (los que encontramos con Bhaskara).

t_1	t_2	
$5^x = 5$	$5^x = 25$	Abra Cadabra.
$5^x = 5^1$	$5^x = 5^2$	Pata de Cabra.
$x_1 = 1$	$x_2 = 2$	Nuevas ecuaciones con los exponentes, que en este caso no es necesario despejar. Hemos encontrado los dos posibles valores de "x"

Ahora debemos encontrar los valores de "**y**" asociado a cada valor de "**x**" encontrado.
Para este paso, podemos trabajar con cualquiera de las dos ecuaciones del sistema de ecuaciones planteado.
En este caso elijo la segunda (**$5^{x+y} = 125$**), ya que parece más simple

$5^{x+y} = 125$	Usamos segunda ecuación dada
$5^x \cdot 5^y = 5^3$	<u>Izquierda</u>: Propiedad de potencias de igual base <u>Derecha</u>: Expreso como potencia para trabajar con la misma base en todos términos.

$5^y = \dfrac{5^3}{5^x}$	Despejo el término que contiene la "**y**".

Una vez realizado el despeje del termino que contiene la variable "**y**", ahora puedo sustituir cada uno de los valores encontrado para "**x**". Y resolverlos.

Con $x_1 = 1$	**Con $x_2 = 2$**
$5^y = \dfrac{5^3}{5^1}$	$5^y = \dfrac{5^3}{5^2}$
$5^y = 5^2$	$5^y = 5^1$
$y = 2$	**$y = 1$**

En este punto ya hemos encontrado los dos posibles valores de (x,y): **R_1: (1 , 2)** **R_2: (2 , 1)**

---

h) $\begin{cases} 3^x + 3^y = 36 \\ 3^{x-y} = 3 \end{cases}$

R: **$x = 3$** **$y = 2$**

---

i) $\begin{cases} 2^x + 3^y = 11 \\ 2^x - 3^y = 5 \end{cases}$

Puedes resolver por igualación o por sustitución. Tú decides.

R: **$x = 3$** **$y = 1$**

---

j) $\begin{cases} 2 \cdot 3^x - 3^y = 15 \\ 3^x + 2 \cdot 3^y = 15 \end{cases}$

Para comenzar, despeja en una de las ecuaciones uno de los términos que contiene una variable (x ó y), luego reemplaza (sustituye) esa expresión despejada en la otra ecuación.

R: **$x = 2$** **$y = 1$**

---

k) $\begin{cases} 2^x + 2^y = 20 \\ 2^{x+y} = 64 \end{cases}$

En este caso, con los resultados, es indistinto cual es "x" y cual es "y". Pruébalo.!

R: **$x = 2$** **$y = 4$**

---

l) {

R: **x =** **y =**

---

m) {

R: **x =** **y =**

---

n) {

R: **x =** **y =**

o) $\begin{cases} \\ \end{cases}$

R: **x =**
y =

p) $\begin{cases} \\ \end{cases}$

R: **x =**
y =

q) $\begin{cases} \\ \end{cases}$

R: **x =**
y =

Sistemas Avanzados y Mixtos

11. $\begin{cases} 2^x + 5^y = 9 \\ 2^{x+2} + 5^{y+1} = 41 \end{cases}$

    Resultado: $x = 2, y = 1$

12. $\begin{cases} 3^{2x} + 3^{2y} = 82 \\ 3^{x+y} = 9 \end{cases}$

    Resultado: $x = 2, y = 0$ (o viceversa)

13. $\begin{cases} 2^x - 3^y = 7 \\ 2^{x/2} - 3^{y/2} = 1 \end{cases}$

    Resultado: $x = 4, y = 2$

14. $\begin{cases} a^{x+y} = a^4 \\ a^{x-y} = a^2 \end{cases}$

    Resultado: $x = 3, y = 1$

15. $\begin{cases} 7^x \cdot 49^y = 7^5 \\ 2^x \cdot 2^{2y} = 32 \end{cases}$

Resultado: Infinitas soluciones que cumplen $x + 2y = 5$