Ecuación Exponencial Natural

(Castelli Horacio P.)

Que es e?

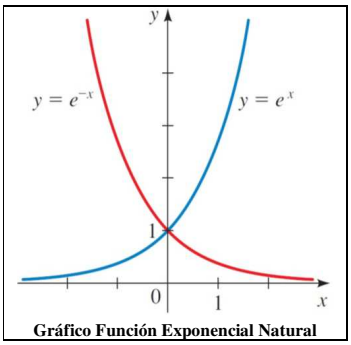

Gráfico Función Exponencial Natural

El número **e**, también conocido como la constante de Euler, es uno de los números más importantes y fascinantes de las matemáticas, a la par del famoso π.

"**e**" es un número irracional, lo que significa que tiene infinitos decimales que no siguen un patrón repetitivo. Su valor aproximado es:

$$e \approx 2{,}718281828459...$$

A diferencia de π, que surge de la geometría (la relación entre el diámetro y la circunferencia), el número **e** surge del análisis matemático y del estudio del crecimiento.

¿Para qué sirve?

El número e es la base natural para describir procesos que crecen o disminuyen de forma continua. Sus aplicaciones principales son:

- **Crecimiento Compuesto**: Fue descubierto originalmente al estudiar los intereses bancarios. Si invirtieras dinero y los intereses se capitalizaran no cada mes, ni cada día, sino en cada instante infinitesimal de tiempo, el límite de tu ganancia estaría determinado por e.
- **Crecimiento Biológico**: Se usa para modelar cómo crecen las poblaciones de bacterias, animales o incluso la propagación de un virus.
- **Desintegración Radiactiva**: En física nuclear, sirve para calcular cuánto tiempo tarda una sustancia en perder su radiactividad.
- **Estadística**: La famosa "Campana de Gauss" (la curva de distribución normal) utiliza el número e en su fórmula.
- **Cálculo**: Es el "héroe" de los matemáticos porque la función $f(x)=e^x$ es la única cuya derivada es ella misma. En palabras simples: su ritmo de crecimiento es igual a su valor en ese momento.

¿Por qué es importante?

Si π es el número de la "**forma**" (círculos y esferas), entonces, "**e**" es el número del "tiempo" y el "cambio". Aparece siempre que algo crece en proporción a su tamaño actual. Incluso aparece en la que muchos consideran la fórmula más bella del mundo, la Identidad de Euler, que conecta los cinco números más importantes de las matemáticas:

$$e^{i\pi} + 1 = 0$$

Comencemos.

Cuando en una ecuación exponencial aparece el número e, se suele hacer una distinción de nombre, aunque siguen siendo ecuaciones exponenciales.
Usualmente se las denomina con cualquiera de estos dos nombres:

- Ecuaciones exponenciales con base **e**.
- Ecuaciones exponenciales naturales.

Recuerda que **e** es la base de los logaritmos naturales.

Comparación con otras exponenciales

- $2^x = 8$ ==> Ecuación exponencial (base 2)
- $10^x = 100$ ==> Ecuación exponencial (base 10)
- $e^x = 7$ ==> Ecuación exponencial de base "**e**" o natural

Para trabajar con este tipo de ecuaciones (desde ya te adelanto que son muy fáciles de resolver), debes manejar bien, temas que este año repasamos o estudiamos recientemente (Potencia, Raíz, Polinomios, Fatorizacion y Logaritmos) .

Ecuación Exponencial Natural

(Castelli Horacio P.)

A continuación, te dejo una serie de reglas, que seguramente serán tus mejores herramientas, ya que en el 90% de los ejercicios, alguna deberás aplicar.

1)	**Toda potencia**, con base distinto de cero y con exponente cero, siempre es igual a 1 (uno):
2)	**Producto de potencias de igual base:** $a^n \cdot a^m = a^{n+m}$
3)	**Cociente de igual base:** $\frac{a^n}{a^m} = a^{n-m}$
4)	**Potencia de una potencia:** $(a^n)^m = a^{n \cdot m}$
5)	**Exponente negativo:** $a^{-n} = \frac{1}{a^n}$
6)	**Exponente fraccionario (Raíces):** $a^{n/m} = \sqrt[m]{a^n}$
7)	**Logaritmo de la Base siempre es 1.**
8)	**Logaritmo de 1 es cero.**
9)	**Logaritmo de cero es $-\infty$ (Infinito negativo).**
10)	**Logaritmo de números negativos no existe.** Salvo que trabajes con valores imaginarios.
11)	**Log de un producto:** $\ln(A \cdot B) = \ln(A) + \ln(B)$
12)	**Log de un cociente** $\ln(A/B) = \ln(A) - \ln(B)$
13)	**Log de una potencia** $\ln(A^n) = n \cdot \ln(A)$

Una pequeña guía para que no te pierdas, estos 3 pasos será clave para resolver casi cualquier ecuación:

- ✓ Aislar: Deja la parte de **e**... sola de un lado de la igualdad.
- ✓ Aplicar **ln( )**: Aplica logaritmo natural en ambos lados de la ecuación para "bajar" el exponente.
- ✓ Resolver: Despeja la x resultante.

El símbolo matemático de **Aproximado** "≈" lo puedes escribir/representar mediante los siguientes códigos:

- En Word: **Alt + 8776**
- Ventana de comandos: **Alt + 247**
- En Python: print("ln(15) **\u2248** 2,70805") Muestra: ln(15) ≈ 2,70805

1) Comenzando - Despejar Incógnitas Usando Logaritmos Naturales.

a) $e^x = 15$

R: **$x = \ln(15)$**

$e^x = 15$	Ecuación Planteada.
$\ln(e^x) = \ln(15)$	Se aplica logaritmo a ambos miembros.
$x \cdot \ln(e) = \ln(15)$	Aplicamos la propiedad del logaritmo de una potencia.
$x = \ln(15)$	Recuerda que el logaritmo de la base (en este caso la base es e) será siempre igual a 1 (uno). Entonces desaparece de la ecuación "**ln(e)**"

Por ahora, el ejercicio puede quedar sin el resultado final, para lo que generalmente usaremos la calculadora. Entonces ln(15) ≈ 2,70805

b) $e^x = e^7$

Toma logaritmo en ambos lados de la ecuación, aplica propiedad del logaritmo de una potencia y listo.

R: **$x = 7$**

c) $e^{2x} = 5$

R: $x = \frac{1}{2} \cdot \ln(5)$

$e^{2x} = 5$	Ecuación Planteada.

$\ln(e^{2x}) = \ln(5)$	Se aplica logaritmo a ambos miembros.
$2x \cdot \ln(e) = \ln(5)$	Aplicamos la propiedad del logaritmo de una potencia.
$2x = \ln(5)$	Recuerda que el logaritmo de la base (en este caso la base es e) será siempre igual a 1 (uno). Entonces desaparece de la ecuación "**ln(e)**"
$x = \frac{1}{2} \cdot \ln(5)$	Despejo "x" y ya tenemos el resultado que estamos buscando, aunque con una calculadora podríamos obtener un valor numérico: x ≈ 0,804710.

d) $3e^x = 21$

Pasa el 3 (tres) dividiendo, luego resuelve.

R: $x = \ln(7)$; $x \approx 1{,}94591$

e) $2e^x - 10 = 0$

R: $x = \ln(5)$; $x \approx 1{,}60944$

f) $5(e^x + 2) = 30$

Primero, a la izquierda, aplica propiedad distributiva.

R: $x = 2\ln(2)$; $x \approx 1{,}38629$

g) $e^{x+1} = 10$

R: $x = \ln(10) - 1$

$e^{x+1} = 10$	Ecuación Planteada.
$\ln(e^{x+1}) = \ln(10)$	Se aplica logaritmo a ambos miembros.
$(x + 1) \ln(e) = \ln(10)$	Aplicamos la propiedad del logaritmo de una potencia.
$x + 1 = \ln(10)$	Recuerda que el logaritmo de la base (en este caso la base es **e**) será siempre igual a 1 (uno). Entonces desaparece de la ecuación "**ln(e)**"
$x = \ln(10) - 1$	Despejo "x" y ya tenemos el resultado que estamos buscando, aunque con una calculadora podríamos obtener un valor numérico: x ≈ 1,30259.

h) $e^{x-4} = 1$

R: $x = 4$

$e^{x-4} = 1$	Ecuación Planteada.
$e^{x-4} = e^0$	Expreso el 1 como e^0
$\ln(e^{x-4}) = \ln(e^0)$	Se aplica logaritmo a ambos miembros.
$(x-4) \cdot \ln(e) = 0 \cdot \ln(e)$	Aplico propiedad del logaritmo de una potencia.
$x - 4 = 0$	Recuerda que el logaritmo de la base siempre es 1 (uno)
$x = 4$	Despejo y queda resuelto el valor de "x"

i) $e^{3x-6} = 1$

En este ejercicio, hay varias formas de resolverlo, ahora te platearé 2 (dos), luego tu eliges cual usar.

R: $x = 2$

$e^{3x-6} = 1$	Ecuación Planteada.
$e^{3x-6} = e^0$	Escribo el 1 (uno) como "e^0". Desde acá tienes al menos dos opciones, analízalas.

Opción 01:	$\ln(e^{3x-6}) = \ln(e^{0})$	Puedo tomar logaritmo en ambos miembros y continuar resolviendo tal como venimos haciendo. Aplicando propiedad: El logaritmo de una potencia es igual.....
Opción 02:	$3x-6 = 0$	Como las bases son iguales, tomo los exponentes y armo nueva ecuación, ya que también deben ser iguales. Ahora continuar resolviendo, despejo "x" llegando al resultado.

Elige algunas de las dos opciones, o busca tú alguna otra opción y termina de resolver.

j) $e^{x+5} = e^{2}$

Tienes dos opciones para resolver:

R: $x = -3$

Opción 01: Directamente considerar que las bases son iguales entonces escribes nueva ecuación igualando los exponentes y resuelves.
Opción 02: Tomas logaritmo en ambos miembros y continuas resolviendo

k) $4e^{3x} = 12$

Primero pasa el 4 (cuatro) dividiendo, y ahora toma logaritmo en ambos lados de la ecuación, aplica propiedad del logaritmo de una potencia y listo.

R: $x = \frac{1}{3} \cdot \ln(3)$ $x \approx 0{,}366204$

l) $e^{2x} = e^{10}$

R: $x = 5$

m) $e^{x+1} = e^{2x-3}$

Igual que en ejercicios anteriores, acá tienes dos opciones para resolver:

R: $x = 4$

Opción 01: Directamente considerar que las bases son iguales entonces escribes nueva ecuación igualando los exponentes y continuas resolviendo.
Opción 02: Tomas logaritmo en ambos miembros y continuas resolviendo.

2) A pensar un poco - Resolver los siguientes ejercicios.

a) $e^{2x} \cdot e^{x} = e^{9}$

R: $x = 3$

$e^{2x} \cdot e^{x} = e^{9}$	Ecuación Planteada.
$e^{3x} = e^{9}$	Aplico propiedad del producto de potencias de igual base

Completa el ejercicio.

b) $e^{x} \cdot e^{2} = e^{9}$

R: $x = 7$

c) $\frac{e^{x}}{e^{3}} = e^{4}$

R: $x = 7$

$\frac{e^{x}}{e^{3}} = e^{4}$	Ecuación Planteada.
$e^{x} \cdot e^{-3} = e^{4}$	

$e^{x-3} = e^4$	**En este paso tenemos dos opciones:** Opción A: A continuación, puedo tomar logaritmo en ambos miembros, igual que en todos los casos anteriores. Opción B: también podría haber razonado: Si las bases son iguales, entontes los exponentes deben ser iguales y escribir nueva igualación con los exponentes, y llegar igual al mismo resultado. Pero me debo saltar los dos siguientes pasos. **Pruébalo.**
$\ln(e^{x-3}) = \ln(e^4)$	Solo hacer con la opción A.
$(x-3).\ln(e) = 4\ln(e)$	Solo hacer con la opción A.
$x - 3 = 4$	Acá continúa, para cualquiera de las dos opciones.
$x = 4 + 3$	Despejo "x"
$x = 7$	Resuelvo y encuentro resultado.

d) $\frac{e^{5x}}{e^{2x}} = e^6$

R: $x = 2$

e) $(e^x)^2 = e^{12}$

R: $x = 6$

f) $\sqrt{e^x} = 5$

R: $x = 2\ln(5)$ $x \approx 3{,}21888$

$\sqrt{e^x} = 5$	Ecuación Planteada.
$e^{\frac{x}{2}} = 5$	Escribo la raíz como una potencia.

Tomas logaritmo en ambos miembros y continuas resolviendo.

g) $e^{\sqrt{x-2}} = 1$

Derecha: Para comenzar, expresa el 1 como e^0.

R: $x = 4$

h) $e^{\frac{2x}{3}} = 10$

R: $x = \frac{3}{2}\ln(10)$ $x \approx 3{,}45388$

i) $\sqrt{e^x} = e^4$

R: $x = 8$

$\sqrt{e^x} = e^4$	Ecuación Planteada.
$e^{\frac{x}{2}} = e^4$	Escribo la raíz como una potencia.

Para completar el ejercicio, al igual que en ejercicios anteriores, acá tienes dos opciones para resolver:
Opción 01: Directamente considerar que las bases son iguales entonces escribes nueva ecuación igualando los exponentes y continuas resolviendo.
Opción 02: Tomas logaritmo en ambos miembros y continuas resolviendo

j) $\sqrt{e^{(x+1)}} = e^3$

R: $x = 5$

k) $\sqrt[3]{e^{(2x-1)}} = 1$

R: $x = \frac{1}{2}$

l) $\sqrt[3]{e^{(2x-1)}} = 2$

R: $x = \frac{3}{2} \cdot \ln(2) + \frac{1}{2}$

$x \approx 1{,}53972$

m) $\sqrt[5]{e^x} = \frac{1}{e}$

R: $x = -5$

$x \approx 2{,}33258$

n) $e^{\frac{x}{3}} . e^{\frac{x}{3}} = e^4$

R: $x = 6$

o) $e^{\frac{x}{2}} + e^{\frac{x}{2}} = 2\sqrt{e^3}$

R: $x = 3$

p) $\frac{\sqrt{e^x}}{\sqrt[4]{e^x}} = \frac{5}{2}$

R: $x = 2\ln\left(\frac{5}{2}\right) + \frac{1}{2}$

q) $e^{1-\frac{1}{x}} = \frac{1}{\sqrt{e}}$

R: $x = \frac{2}{3}$

r) $e^{\frac{3x+1}{4}} = e^2 . \sqrt[3]{e}$

R: $x = \frac{25}{9}$

s) $(2e^{x/3})^2 = e^{x-5}$

R: $x = 15 + 6\ln(2)$

$x \approx 19{,}15888$

$(2e^{x/3})^2 = e^{x-5}$	Ecuación Planteada.
$4.e^{2x/3} = e^{x-5}$	Izquierda: Resuelvo el cuadrado dentro del paréntesis.
$\ln(2^2 . e^{(2x/3)}) = \ln(e^{(x-5)})$	Toda la ecuación: Tomo logaritmo en ambos lados de la ecuación. Izquierda: expreso el 4 como potencia de dos.
$\ln(2^2) + \ln(e^{(2x/3)}) = \ln(e^{(x-5)})$	Izquierda: Propiedad: Logaritmo del producto es la suma de los logaritmos

$2\ln(2) + \frac{2x}{3}\ln(e) = (x-5)\ln(e)$	Aplico en todos los lugares, la propiedad: Logaritmo de una potencia es igual al exponente por el logaritmo de la base.
$2\ln(2) + \frac{2x}{3} = (x-5)$	Recordar que, el logaritmo de la base, siempre es igual a 1.
$\frac{2x}{3} - x = -2\ln(2) - 5$	Despejo.
$\frac{2x - 3x}{3} = -2\ln(2) - 5$	Izquierda: Sumo los elementos.
$-x = 3[\,-2\ln(2) - 5\,]$	Continuamos despejando y resolvemos.
$-x = -6\ln(2) - 15$	Derecha: Aplico propiedad distributiva. Debes notar que quedo toda la ecuación negativa.
$x = 6\ln(2) + 15$	Multiplico ambos miembros por -1 (menos uno). Queda terminado el ejercicio.

t) $e^{\frac{x}{4}} = \frac{e^2}{e^{\frac{x}{4}}}$

R: $x = 4$

u) $e^{\frac{x+1}{x-1}} = e^2$

R: $x = 3$

3) A Resolver.

a) $\frac{e^{x^2+4}}{e^{4x}} = 1$

Primero, En la parte izquierda, se traslada el denominador al numerador, recuerda la Propiedad del Exponente Negativo.
Segundo, escribe el 1 (uno) de la derecha como e^0.
Tercero, Termina de resolver.

R: $x = 2$

b) $e^{(x^2)} = e^{16}$

R: $x = 4$ $x = -4$

c) $e^{(x^2)} = e^{x+6}$

R: $x = -2$ $x = 3$

d) $\frac{e^{(x^2)}}{e^{\frac{x}{2}}} = e^3$

Te ayudo con la primera parte.

R: $x_1 = 2$ $x_2 = -\frac{3}{2}$

$\frac{e^{(x^2)}}{e^{\frac{x}{2}}} = e^3$	Ecuación Planteada.
$e^{(x^2)} = e^3 . e^{\frac{x}{2}}$	El denominador de la izquierda, pasa multiplicando al numerador de la derecha.

Sumo Exponentes de la derecha $3+\frac{x}{2}=\frac{6+x}{2}$	$e^{\left(x^2\right)}=e^{\frac{6+x}{2}}$	Derecha: Aplico el producto de potencias de igual base, y sumo los exponentes.

En este punto, tienes dos opciones para continuar:
Opción 01: Directamente considerar que las bases son iguales entonces escribes nueva ecuación igualando los exponentes y continúas resolviendo.
Opción 02: Tomas logaritmo en ambos miembros y continúas resolviendo.

Termina tú el ejercicio.

e) $\left(e^{\frac{x}{2}}+1\right).\left(e^{\frac{x}{2}}-1\right)=3$ Primero, a la izquierda, realiza en producto de dos binomios (conjugados).

R: $x = 2\ln(2)$; $x \approx 1{,}38629$

Recuerda que, el producto de dos binomios conjugados, siempre resulta en una diferencia de cuadrados.

f) $e^{\frac{x^2-1}{2}}=e^{\frac{3}{2}}$

R: $x_1 = -2$; $x_2 = 2$

g) $e^{2x} - 3e^{x} + 2 = 0$ Resolver por sustitución $t = e^x$

R: $x_1 = 0$; $x_2 = \ln(2)$

$e^{2x} - 3e^{x} + 2 = 0$	Ecuación Planteada.
$(e^{x})^2 - 3e^{x} + 2 = 0$	Separo primer miembro para poder sustituir.
$t^2 - 3t + 2 = 0$	Sustillo e^x por t
$t_1 = 1$ y $t_2 = 2$	Resuelvo con Bhaskara, y encuentro las dos posibles raíces.

$x=\frac{-b\pm\sqrt{b^2-4ac}}{2a}$

Muy importante este paso

Primera ecuación:	$e^x = 1$
Segunda ecuación:	$e^x = 2$

Habiendo encontrado los valores de t_1 y t_2 (de la sustitución), Igualo cada uno de los valores en la parte de la ecuación que sustituí. Es decir, igualo cada resultado con e^x

$x_1 = 0$ $x_2 = \ln(2)$; $x \approx 0{,}693147$

Resuelvo ambas ecuaciones, cada una por separado y de la forma que venimos estudiando. Entonces, con esto encontramos los resultados finales, de la ecuación planteada en el ejercicio.

Si algo no te quedo claro, consulta con tu profesor.

h) $\left(e^{x}-4\right)^2 = 9$

R: $x_1 = 0$; $x_2 = \ln(7)$; $x_2 \approx 1{,}94591$

$\left(e^{x}-4\right)^2 = 9$	Ecuación Planteada.
$e^{2x} - 8e^{x} + 16 = 9$	Izquierda: Desarrollo el cuadrado de un Binomio.
$e^{2x} - 8e^{x} + 16 - 9 = 0$	Paso todos los elementos de la ecuación a la izquierda de la igualdad.
$e^{2x} - 8e^{x} + 7 = 0$	Resolvemos.
$t^2 - 8t + 7 = 0$	Sustillo e^x por t. Y resuelvo con Bhaskara la ecuación de segundo grado resultante.
$t_1 = 1$ y $t_2 = 7$	Encuentro las raíces de la nueva ecuación planteada.

$x=\frac{-b\pm\sqrt{b^2-4ac}}{2a}$

Ecuación Exponencial Natural

(Castelli Horacio P.)

Paso Importante:

$e^x = 1$	$e^x = 7$	Igualamos los valores de "**t**" que encontramos, con e^x.
$\ln(e^x) = \ln(1)$	$\ln(e^x) = \ln(7)$	Resuelvo ambas ecuaciones por separado. Tomo logaritmo en ambos lados de la igualdad.
$x.\ln(e) = 0$	$x.\ln(e) = \ln(7)$	Aplico propiedad del logaritmo de una potencia, y resuelvo ln(1)
$x_1 = 0$	$x_2 = \ln(7)$	Resuelvo y encuentro los valores finales

i) $e^{2x} - 5e^x + 6 = 0$

Resolver por sustitución $t = e^x$

Para tu control:
$t_1 = 2$ y $t_2 = 3$

R: $x_1 = \ln(2)$ $x_1 \approx 0{,}693147$ $x_2 = \ln(3)$ $x_2 \approx 1{,}09861$

j) $e^{2x} + e^x - 6 = 0$

Resolver por sustitución $t = e^x$
y
Explicar los valores de x_1 y x_2.

R: $x_1 = \ln(2)$ $x_1 \approx 0{,}693147$ $x_2 =$ **No se puede**

k) $e^x + e^{-x} = 2$

Te ayudo con la primera parte, tu termina.
Resolver por sustitución $t = e^x$

R: $x = 0$

$e^x + e^{-x} = 2$	Ecuación Planteada.
$e^x + \frac{1}{e^x} = 2$	
$\frac{(e^x)^2 + 1}{e^x} = 2$	Izquierda: Sumo ambos elementos.
$(e^x)^2 + 1 = 2e^x$	Paso el denominador de la izquierda al numerador de la derecha.
$(e^x)^2 - 2e^x + 1 = 0$	Paso todos miembros de la ecuación a la izquierda del signo igual.
$t^2 - 2t + 1 = 0$	Sustillo e^x por t y ya puedes aplicar la fórmula de Bhaskara.

$$x = \frac{-b \pm \sqrt{b^2 - 4ac}}{2a}$$

Termina de resolver el ejercicio.
Para tu control, dejo el valor de "**t**" que deberás encontrar $t = 1$ (por que un solo valor?)
Cuidado, que el resultado final es $x = 0$

l) $e^x - 6e^{-x} = 1$

Recuerda resolver por sustitución $t = e^x$

R: $x = \ln(3)$ $x_1 \approx 1{,}09861$

m) $2e^x + 3e^{-x} = 7$

Para que puedas controlar:

$t_1 = \frac{1}{2}$ $t_2 = 3$

R: $x_1 = -\ln(2)$ $x_1 \approx -0{,}693147$ $x_2 = \ln(3)$ $x_2 \approx 1{,}09861$

n) $e^{2x} - e^x = 0$

Para que inicies fácilmente

R: $x = 0$

$e^{2x} - e^x = 0$	Ecuación Planteada.

$e^{2x} = e^{x}$	Muy Simple.

Ahora ya puedes terminar sin ayuda el ejercicio.

o) $e^{x} \cdot e^{(x^2)} = e^{12}$

Comienza, por la derecha, aplicando el producto de potencia de igual base.

R: $x_1 = 3$ $x_2 = -4$

p) $e^{(x^2-5x+6)} = 1$

Sugerencia:
A la derecha, expresa el 1 (uno) como e^0.

R: $x_1 = 2$ $x_2 = 3$

q) $e^{2x} = 3e^{x} + 10$

Ayuda con la primera parte.

R: $x = \ln(5)$

$e^{2x} = 3e^{x} + 10$	Ecuación Planteada.
$e^{2x} - 3e^{x} - 10 = 0$	Agrupo todos los términos a la izquierda (es una ecuación cuadrática).
$\left(e^{x}\right)^2 - 3e^{x} - 10 = 0$	Fácil, analiza.
$t^2 - 3t - 10 = 0$	Sustillo e^x por t y ya puedes aplicar la fórmula de Bhaskara.

$x = \frac{-b \pm \sqrt{b^2 - 4ac}}{2a}$

Desde acá puedes continuar sin ayuda. Pero con cuidado, que tienes dos valores intermedios, pero solo uno sirve, por que? Para que puedas controlar:

$t_1 = -2$ y $t_2 = 5$

r) $e^{2x} + 4 = 5e^{x}$

Ya sabes que hacer, igual que antes.

R: $x_1 = 0$ $x_2 = 2\ln(2)$ $x_1 \approx 1{,}38629$

s) $\sqrt[3]{e^{2x-1}} = e^{x}$

R: $x = -1$

t) $\frac{10}{1 + e^{x}} = 5$

Si sabes despejar, este es un regalo.!

R: $x = 0$

u) $e^{\left(\frac{x+1}{x-1}\right)} = e^{2}$

R: $x = 3$

v) $2^{x} \cdot e^{x} = 5$

Lo puedes resolver de varias formas, acá te dejo una de ella, que mantiene la metodología de trabajo que venimos usando.

R: $x = \frac{\ln(5)}{\ln(2)+1}$ $x \approx 0{,}95056$

$2^{x} \cdot e^{x} = 5$	Ecuación Planteada.
$(2e)^{x} = 5$	Agrupo.

$\ln(2e)^x = \ln(5)$	Aplico logaritmo en ambos miembros.
$x \cdot \ln(2e) = \ln(5)$	Izquierda: Propiedad que dice, logaritmo de una potencia es igual al exponente por el logaritmo de la base
$x\,[\ln(2) + \ln(e)] = \ln(5)$	Izquierda: Propiedad que dice, logaritmo del producto es igual a la suma de los logaritmos
$x\,[\ln(2) + 1] = \ln(5)$	Izquierda: El logaritmo de la base es igual a 1 (uno)
$x = \frac{\ln(5)}{\ln(2)+1}$	Despejo "**x**".

w) $e^{2x-1} = \pi$

Comienza aplicando logaritmo en ambos lados de la igualdad.

R: $x = \frac{\ln(\pi)+1}{2}$ $x \approx 1{,}07236$

x) $\ln\left(e^{2x+1}\right) = x^2$

Pequeña Ayuda. Derecha, aplica propiedad que dice: Logaritmo de una potencia es igual al exponente por el logaritmo de la base. Ahora puede continuar y finalizar ejercicio.

R: $x_1 = 1+\sqrt{2}$ $x_1 \approx 2{,}41421$ $x_2 = 1-\sqrt{2}$ $x_2 \approx -0{,}41421$

y) $x^2.e^x - 9e^x = 0$

R: $x_1 = 3$ $x_2 = -3$

$x^2.e^x - 9e^x = 0$	Ecuación Planteada.
$e^x.(x^2 - 9) = 0$	Extraigo Factor común.

Desde acá es muy simple. Para encontrar los valores de "x" que satisfacen la ecuación (raíces), debemos considerar que la ecuación (a la derecha) tiene dos partes. La primera "e^x" nunca será cero, pero la segunda parte (x^2- 9) es una ecuación cuadrática y tiene dos raíces. Encuéntralas y habrás resuelto la ecuación. Si no queda bien claro, pregúntale al profesor en clase.

4) Sustitución (Parte 1). Ejercicios que llegan atrasados.

La resolución de ecuaciones exponenciales por el método de sustitución (también conocido como cambio de variable) es una técnica algebraica que se utiliza cuando la ecuación tiene una tiene estructura que se repite en cada termino.

Por ejemplo: $(2^x)^2 - 2 \cdot 2^x + 1 = 0$. En este ejemplo 2^x es la estructura que se repite y la podremos reemplazar por una letra, que en este caso (y porque me gusta) usare la letra "**t**".

Entonces reemplazo en todos los lugares que encuentro 2^x por "**t**". Y la ecuación ahora se visualizará con un formato más simple de comprender: $t^2 - 2t + 1 = 0$

En lugar de despejar la "x" directamente, "disfrazamos" la parte exponencial (la parte que se repite) con una letra más sencilla para poder operar.

Ahora, si miras bien como ha quedado la ecuación, seguramente descubrirás que es una ecuación cuadrática (una parábola), que podremos resolver usando Fórmula de Bhaskara. Recuerdas?

$$x = \frac{-b \pm \sqrt{b^2 - 4ac}}{2a}$$

Fórmula de Bhaskara: permite calcular las raíces de un polinomio de

segundo grado. Fue deducida por el famoso matemático indio Bhaskaracharya, más conocido como Bhaskara II.

Una vez resuelta la ecuación sustituida, nos queda un pasito más, pero lo veremos al resolver nuestro primer ejemplo.

Si bien ya se resolvieron ejercicios por sustitución, desde acá daremos especial atención a este útil y ampliamente usado artilugio para resolver ejercicios complejos.

a) $2^{2x} - 5 \cdot 2^x + 4 = 0$ Sustitución que usaremos $t = 2^x$ R: $x_1 = 0$ $x_2 = 2$

Primera Parte:

$2^{2x} - 5 \cdot 2^x + 4 = 0$		Ecuación Planteada.
$(2^x)^2 - 5(2^x) + 4 = 0$		Encierro entre paréntesis la estructura que se repite (solamente para que la visualices) y ahora la sustituiré con "**t**" (me gusta esa letra, podría ser otra).
$t^2 - 5t + 4 = 0$		Sustituyo $2^x = t$
$t_1 = 1$	$t_2 = 4$	Resuelvo la ecuación cuadrática (encuentro sus raíces) con Bhaskara.

$$x = \frac{-b \pm \sqrt{b^2 - 4ac}}{2a}$$

En este punto, ya se ha resuelto la ecuación sustituida, pero nos falta revertir la sustitución, lo que resulta muy simple. Primero dijimos que $2^x = t$. Encontramos los valores de "**t**", ahora simplemente re escribimos, pero reemplazando "t" por sus valores (los que encontramos con Bhaskara).

Segunda Parte:

$2^x = t_1$	$2^x = t_2$	Quedan dos ecuaciones que deberemos resolver.
$2^x = 1$	$2^x = 4$	Reemplazamos los valores de t_1 y t_2.
$2^x = 2^0$	$2^x = 2^2$	Igualamos las bases.
Resultado final: $x_1 = 0$	$x_2 = 2$	Entonces si las bases son iguales, los exponentes deben ser iguales para respetar la igualdad.

b) $3^{2x} - 12 \cdot 3^x = -27$ Sustitución Sugerida $t = 3^x$ R: $x_1 = 1$ $x_2 = 2$

c) $4^x - 6 \cdot 2^x + 8 = 0$ Sustitución Sugerida $t = 2^x$ R: $x_1 = 1$ $x_2 = 2$

d) $5^{2x} - (6 \cdot 5^x) = -5$ Sustitución Sugerida $t = 5^x$ R: $x_1 = 0$ $x_2 = 1$

e) $9^x - 10 \cdot 3^x + 9 = 0$ Sustitución Sugerida $t = 3^x$ R: $x_1 = 0$ $x_2 = 2$

f) $2^{2x+1} - 5 \cdot 2^x + 2 = 0$ Sustitución Sugerida $t = 2^x$ R: $x_1 = -1$ $x_2 = 1$

g) $2^{x+1} + 2^{x-1} = 20$ A este ejercicio, te lo resuelve de una forma, puedes resolverlo por sustitución? Sugerida $t = 2^x$ R: $x = 3$

$2^{x+1} + 2^{x-1} = 20$	Ecuación dada.

$2^x \cdot 2^1 + 2^x \cdot 2^{-1} = 20$	Aplico (al revés) la propiedad que dice: el producto de potencias de igual base.... Piensa: 2^{-1} es 1/2.
$2^x (2 + 1/2) = 20$	Extraigo factor común 2^x.
$2^x . \frac{5}{2} = 20$	Resuelvo paréntesis.
$2^x = \frac{20 . 2}{5}$	Paso el 5 dividiendo y el 2 multiplicando y.....
$2^x = 8$	Resuelvo.
$2^x = 2^3$	Expreso el 8 como una potencia de 2.
$x = 3$	Como las bases son iguales, entonces los exponentes son iguales.

h) $3^{2x-1} - 4 . 3^{x-1} = -1$ Sustitución Sugerida $t = 3^x$ R: $x_1 = 0$, $x_2 = 1$

i) $e^{2x} - 3e^x + 2 = 0$ Sustitución Sugerida $t = e^x$ R: $x_1 = 0$, $x_2 = \ln(2)$, $x_2 \approx 0{,}693147$

j) $4^x + 2^{x+1} = 8$ Sustitución Sugerida $t = 2^x$ R: $x = 1$

k) $25^x - 5^x - 20 = 0$ Sustitución Sugerida $t = 5^x$ R: $x = 1$

l) $7^{(1+x)} + 7^{(1-x)} = 50$ Cuidado con este ejercicio. Analízalo bien. R: $x_1 = -1$, $x_2 = 1$

$7^{(1+x)} + 7^{(1-x)} = 50$	Ecuación Planteada.
$7^1 . 7^x + 7^1 . 7^{-x} = 50$	**Abra Cadabra....**
$7^1 . 7^x + 7^1 . \frac{1}{7^x} = 50$	**Pata de Cabra....** y estamos listo para hacer un reemplazo o sustitución.
$7^1 . t + 7^1 . \frac{1}{t} = 50$	Hacemos el reemplazo de $7^x = t$
$7t + 7\frac{1}{t} = 50$	Escribo lo mismo que en el renglón anterior, pero más bonito.
$\frac{7t^2 + 7}{t} = 50$	Izquierda del signo igual: Sumo los elementos.
$7t^2 + 7 = 50t$	Despeje (paso 1)
$7t^2 - 50t + 7 = 0$	Despeje (paso 2). Te parece conocido el formato?

$x = \frac{-b \pm \sqrt{b^2 - 4ac}}{2a}$

Si resuelves todo bien, seguramente encontraras estos valores para t_1 y t_2 : $t_1 = \frac{1}{7}$ y $t_2 = 7$

Ahora que ya encontraste los valores de **t**, hay que revertir la sustitución ($7^x = t$), y reemplazar t_1 y t_2 por los valores que encontramos. Entonces..

Ecuación 1	Ecuación 2	
$7^x = \frac{1}{7}$	$7^x = 7$	Desde acá resolvemos separadamente cada una de las dos ecuaciones.
Si resuelves bien, los resultados de cada ecuación deben ser:		
$x_1 = -1$	$x_2 = 1$	Resultados finales.

m) $2^x + 2^{1-x} = 3$ Sustitución Sugerida $t = 2^x$

R: $x_1 = 0$, $x_2 = 1$

n) $e^x - 6e^{-x} = 1$ Sustitución Sugerida $t = e^x$

R: $x = \ln(3)$, $x \approx 1{,}09861$

5) Sustitución (Parte 2).

a) $(3^{x+1})^2 - 10 \cdot 3^{x+1} + 9 = 0$ Sustitución Sugerida $t = 3^{x+1}$

R: $x_1 = -1$, $x_2 = 1$

$(3^{x+1})^2 - 10 \cdot 3^{x+1} + 9 = 0$	Ecuación Planteada.
$t^2 - 10t + 9 = 0$	Realizamos sustitución evidente. $t = 3^{x+1}$

Una vez sustituida, encontramos una ecuación cuadrática, que podremos resolver (encontrar sus raíces) con la fórmula de Bhaskara. Acá lo importante será reconocer y trabajar con los coeficientes a, b y c.

$x = \frac{-b \pm \sqrt{b^2 - 4ac}}{2a}$	
$a = 1$ $b = -10$ $c = 9$	Escribimos los coeficientes y mucho cuidado con los signos.
$t = \frac{-(-10) \pm \sqrt{(-10)^2 - 4 \cdot 1 \cdot 9}}{2 \cdot 1}$	Reemplazamos los coeficientes en la formula de Bhaskara y resolvemos.
$t_1 = 1$ y $t_2 = 9$	Al resolver encontramos los valores intermedios de t_1 y t_2

Habiendo resuelto la Sustituimos $t = 3^{x+1}$, ahora revertimos la substitución para lo que reemplazamos cada uno de los valores que encontramos para "**t**". Entonces:

Ecuación t_1	Ecuación t_2	
$1 = 3^{x+1}$	$9 = 3^{x+1}$	
$3^0 = 3^{x+1}$	$3^2 = 3^{x+1}$	Quedan iguales la Bases
$0 = x+1$	$2 = x+1$	Para respetar las igualdades, se igualan los exponentes. Escribo nuevas ecuaciones.
$0 - 1 = x$	$2 - 1 = x$	Despejamos y resolvemos.
$-1 = x$	$1 = x$	Resultados finales.

b) $(e^{x-3})^2 - 4e^{x-3} + 3 = 0$ Sustitución Sugerida $t = e^{x-3}$

R: $x_1 = 3$, $x_2 = 3 + \ln(3)$, $x_2 \approx 4{,}09861$

c) $(2^{x+2})^2 - 17 \cdot 2^{x+2} + 4 = 0$ Sustitución Sugerida $t = 2^{x+2}$

R: $x_1 = 0$, $x_2 = -4$

d) $(5^{x-5})^2 - 30 \cdot 5^{x-5} + 125 = 0$ Sustitución Sugerida $t = 5^{x-5}$

R: $x_1 = 6$ $x_2 = 7$

e) $3.(3^{2x+1})^2 - 10 \cdot 3^{2x+1} + 3 = 0$ Sustitución Sugerida $t = 3^{2x+1}$

R: $x_1 = 0$ $x_2 = -1$

f) $5^{2x+2} - 26 \cdot 5^{x+1} + 25 = 0$ Sustitución Sugerida $t = 5^{x+1}$

R: $x_1 = -1$ $x_2 = 1$

$5^{2x+2} - 26 \cdot 5^{x+1} + 25 = 0$	Ecuación Planteada.

Una de las Claves para resolver fácilmente está en darse cuenta que 5^{2x+2} es lo mismo que $(5^{x+1})^2$

$(5^{x+1})^2 - 26 \cdot 5^{x+1} + 25 = 0$	Recuerda que 5^{2x+2} es lo mismo que $(5^{x+1})^2$
$t^2 - 26t + 25 = 0$	Realizamos sustitución $t = 5^{x+1}$

Una vez realizada la sustitución, encontramos una ecuación cuadrática, que podremos resolver (encontrar sus raíces) con la fórmula de Bhaskara. Acá lo importante será reconocer y trabajar con los coeficientes a, b y c.

$x = \frac{-b \pm \sqrt{b^2 - 4ac}}{2a}$

$a = 1$ $b = -26$ $c = 25$	Escribimos los coeficientes y mucho cuidado con los signos.
$t = \frac{-(-26) \pm \sqrt{(-26)^2 - 4.1.25}}{2.1}$	Reemplazamos los valores en formula
$t = \frac{26 \pm \sqrt{676 - 100}}{2}$	Resonvemos.
$t = \frac{26 \pm \sqrt{576}}{2}$	Resonvemos.
$t = \frac{26 \pm 24}{2}$	Resonvemos.

Terminamos de resolver y encontraremos los dos posibles valores para $t_1 = 1$ y $t_2 = 25$
Ahora queda invertir la sustitución, es decir reemplazar los valores de t_1 y t_2 en $t = 5^{x+1}$ y calcular resultados finales.

Ecuación 1	Ecuación 1	
$1 = 5^{x+1}$	$25 = 5^{x+1}$	Reemplazo "t" con valores encontrados.
$5^0 = 5^{x+1}$	$5^2 = 5^{x+1}$	Igualo las bases.
$0 = x+1$	$2 = x+1$	Igualo los exponentes.
$0 - 1 = x$	$2 - 1 = x$	Despejo.
$-1 = x$	$1 = x$	Resultado Final.

g) $2^{2x-2} - 5 \cdot 2^{x-1} = -4$ Sustitución Sugerida $t = 2^{x-1}$

R: $x_1 = 1$ $x_2 = 3$

Recuerda que una de las Claves para resolver fácilmente, está en darse cuenta que 2^{2x-2} es lo mismo que $(2^{x-1})^2$

h) $7^{2x-4} - 8 \cdot 7^{x-2} + 7 = 0$ Sustitución Sugerida $t = 7^{x-2}$

R: $x_1 = 2$ $x_2 = 3$

Recuerda que la clave está en darse cuenta que 7^{2x-4} es lo mismo que $(7^{x-2})^2$

i) $10^{2x+4} - 101 \cdot 10^{x+2} = -100$ Sustitución Sugerida $t = 10^{x+2}$

R: $x_1 = -2$ $x_2 = 0$

¿¿¿¿¿¿ ??????

j) $2^{2x+6} - 9 \cdot 2^{x+3} + 8 = 0$ Sustitución Sugerida $t = 2^{x+3}$

R: $x_1 = -3$ $x_2 = 0$

Recuerdas cual era una de las clave para resolver este ejercicio¿?

k) $9^{x-1} - 4 \cdot 3^{x-1} = -3$ Sustitución Sugerida $t = 3^{x-1}$

R: $x_1 = 1$ $x_2 = 2$

l) $2^{x+3} + 2^{-(x+3)} = \frac{5}{2}$ Sustitución Sugerida $t = 2^{x+3}$

R: $x_1 = -2$ $x_2 = -4$

m) $4 \cdot 2^{x-2} - 17 \cdot 2^{x-2} + 4 = 0$ Sustitución Sugerida $t = 2^{x-2}$

R: $x_1 = 0$ $x_2 = 4$

n) $3^{2x-6} - 12 \cdot 3^{x-3} + 27 = 0$ Sustitución Sugerida $t = 3^{x-3}$

R: $x_1 = 4$ $x_2 = 5$

o) $e^{2x+2} - (e+1).e^{x+1} + e = 0$ Sustitución Sugerida $t = e^{x+1}$

Y para tu control $t_1 = e$ y $t_2 = 1$

R: $x_1 = 0$ $x_2 = -1$

$e^{2x+2} - (e+1).e^{x+1} + e = 0$	Ecuación Planteada.

Recuerdas?. La clave está en darse cuenta que e^{2x+2} es lo mismo que $(e^{x+1})^2$

$(e^{x+1})^2 - (e+1).e^{x+1} + e = 0$	Escribimos e^{2x+2} como $(e^{x+1})^2$, ya que matemáticamente es igual, pero nos deja listo para realizar una sustitución
$t^2 - (e+1).t + e = 0$	Sustituimos $t = e^{x+1}$

Una vez sustituida, encontramos una ecuación cuadrática, que podremos resolver (encontrar sus raíces) con la fórmula de Bhaskara. Acá lo importante será reconocer y trabajar con los coeficientes a, b y c.

$x = \frac{-b \pm \sqrt{b^2 - 4ac}}{2a}$

$a = 1$ $b = (-e-1)$ $c = e$	Escribimos los coeficientes y mucho cuidado con los signos.
$t = \frac{-(-e-1) \pm \sqrt{(-e-1)^2 - 4.1.e}}{2.1}$	Analiza bien. Fíjate que dentro de la raíz (parte del discriminante) tienes el cuadrado de un binomio $(-e-1)^2$.
$t = \frac{e+1 \pm \sqrt{e^2 + 2e + 1 - 4e}}{2}$	Resolvemos.
$t = \frac{e+1 \pm \sqrt{e^2 - 2e + 1}}{2}$	Agrupamos (sumas y restas) el discriminante.

	$t = \frac{e+1 \pm \sqrt{(e-1)^2}}{2}$	Factorizamos el discriminante.
	$t = \frac{(e+1) \pm (e-1)}{2}$	Resolvemos el Numerador. Y atento, queda una suma/resta de dos binomios.
Valores intermedios	**$t_1 = e$**	Resolvemos la **Suma** de dos binomios
	$t_2 = 1$	Resolvemos la **Resta** de dos binomios

Habiendo resuelto la Sustituimos **$t = e^{x+1}$**, ahora queda reemplazar los valores. Entonces:

Ecuación t_1	**Ecuación t_2**	
$e = e^{x+1}$	**$1 = e^{x+1}$**	
$e^1 = e^{x+1}$	**$e^0 = e^{x+1}$**	Quedan iguales la Bases
$1 = x+1$	**$0 = x+1$**	Para respetar las igualdades, Se igualan los exponentes. Escribo nuevas ecuaciones
$1 - 1 = x$	**$0 - 1 = x$**	Resuelvo
$0 = x$	**$-1 = x$**	Encontramos los resultados.

Y con que podrías continuar?

- Funciones de tipo potencial-exponencial. o funciones exponenciales generales.
- Función Exponencial de Variable Compleja, o simplemente "Exponencial compleja,
- La Tetración o Torres de Potencias.
- Función W de Lambert. Fundamental en física cuántica y calculo del crecimiento de redes neuronales.

Resumen de la "Escalera de Poder"

Nivel	Tipo de Función	Ejemplo	Complejidad
1	**Polinómica**	x^2	Fácil / Algebraica
2	**Exponencial**	e^x	Trascendente básica
3	**Potencial-Exponencial**	x^x	Trascendente mixta
4	**Tetración**	${}^n x$	Hiper-aritmética
5	**Funciones Especiales**	$\Gamma(z), \zeta(s)$	Análisis superior

Y con todo esto, ya casi habrás aprendido, lo que corresponde al carocito de la aceituna.
Que esta en una copa del brindis, del comienzo de la fiesta.
y desde acá, es una poesía musical.
Solo déjate llevar..