RAÍCES O CEROS COMPLEJOS DE ECUACIONES CUADRÁTICAS

Desde este punto, solo necesitaremos los conocimientos previos y un poquito de ingenio, pero si prestas atención veras que es muy simple la resolución de los ejercicios y problemas que a continuación se plantean.

Resolver

Comencemos con un rápido repaso, y de a poco avancemos con lo que debemos aprender. **(Estos ejercicios ya los resolvimos en guías anteriores).**

$i^0 = 1$
$i^1 = i$
$i^2 = -1$
$i^3 = -i$
$i^4 = 1$

1) $\sqrt{-4}$ **Y recuerda que:** $i = \sqrt{-1}$ R: $\pm 2i$

Y para resolver esto que debíamos hacer? $\sqrt{-4} = \sqrt{4}\,\sqrt{-1} = \pm 2i$

2) $\sqrt{-100}$ R: $\pm 10i$

3) $\sqrt{-18}$ R: $\pm 3\sqrt{2}\,i$

$$\sqrt{-18} = \sqrt{9\cdot 2\cdot(-1)} = \sqrt{9}\cdot\sqrt{2}\cdot\sqrt{-1} = \pm 3\sqrt{2}\,i$$

4) $\sqrt{-75}$ R: $5\sqrt{3}\,i$

5) $3\sqrt{-16}$ R: $12\,i$

DEMOS UN PASO Y AVANCEMOS UN POQUITO.

Si una función cuadrática no corta al eje x, tiene raíces complejas. Identificaremos estas ecuaciones, al tratar de encontrar las raíces con la fórmula **de Bhaskara.** Algo que seguramente te ha sucedido mas de una vez, te quedará un valor negativo dentro del símbolo de raíz cuadrada, caso en que inmediatamente entendemos que no tiene raíz, en el campo de los números reales, pero si las tiene con los números complejos.

$$x = \frac{-b \pm \sqrt{b^2 - 4ac}}{2a}$$

Encuentra las raíces o ceros complejos de cada ejercicio o ecuación y grafica.

6) $x^2 + 1 = 0$ R: $\pm i$

Despejamos y... $x^2 + 1 = 0 \Rightarrow x^2 = -1 \Rightarrow x = \pm\sqrt{-1}$ **Y recuerda que:** $i = \sqrt{-1}$

Dos cosas muy importantes que ya debes saber:

El eje de simetría de una parábola pasa por Vx (Coordenada **x** del Vértice).

El eje de simetría divide una parábola en dos partes iguales.

Resolvamos y Grafiquemos

Si una elución cuadrática tiene raíces complejas, puedes graficarla igual que lo has hecho siempre.

7) $x^2 - 6x + 10 = 0$

R_1:	**3 + i**
R_2:	**3 - i**

Comienza por la tabla de valores que construyes mientras calculas los valores faltantes antes de graficar.

Ramas	Coeficientes	Ordenada	R1	R2	Vértice
	a = 1 b = -6 c = 10	**10**	**(3+i)**	**(3-i)**	**Vx = 3 Vy = 1** $Vx = \frac{-b}{2a}$

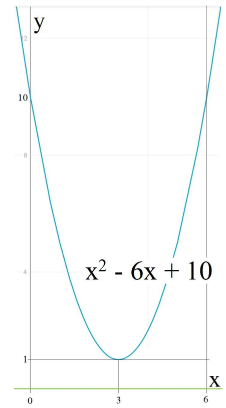
Usamos Fórmula de Bhaskara

$$x^2 - 6x + 10 = 0 \Rightarrow x = \frac{6 \pm \sqrt{36-40}}{2} \Rightarrow x = \frac{6 \pm \sqrt{-4}}{2} \begin{cases} (3+i) \\ (3-i) \end{cases}$$

Calculo del Vértice

$$Vx = \frac{-b}{2a} \qquad Vx = \frac{-(-6)}{2.1} = \frac{6}{2} = 3$$

Recuerda que para calcular **Vy** deberás reemplazar el valor que acabas de encontrar para **Vx** en la ecuación original.



IMPORTANTE: y que paso con las raíces complejas en el grafico? La respuesta es nada, ya que no se ven. :)

8) $x^2 - 2x + 5 = 0$

Ramas	Coeficientes	Ordenada	Vértice
	a = 1 b = -2 c = 5	5	Vx = 1 Vy = 4

R_1:	**1+2i**
R_2:	**1-2i**

9) $-x^2 + 2x - 5 = 0$

Ramas	Coeficientes	Ordenada	Vértice
	a = -1 b = 2 c = -5	-5	Vx = 1 Vy = -4

R_1:	**1+2i**
R_2:	**1-2i**

10) $x^2 + 10x + 35$

Ramas	Coeficientes	Ordenada	Vértice
	a = 1 b = 10 c = 35	35	Vx = -5 Vy = 10

R_1:	$-5 + \sqrt{10}\,i$
R_2:	$-5 - \sqrt{10}\,i$

11) $-2x^2 + 4x - 3 = 0$

Ramas	Coeficientes	Ordenada	Vértice
	a = -2 b = 4 c = -3	-3	Vx 1 Vy -1

R_1:	$1 + \frac{\sqrt{2}}{2} i$
R_2:	$1 - \frac{\sqrt{2}}{2} i$

12) $x^2 - 8x + 18 = 0$

Ramas	Coeficientes	Ordenada	Vértice
	a = 1 b = -8 c = 18	18	Vx = 4 Vy = 2

R_1:	$4 + \sqrt{2}\,i$
R_2:	$4 - \sqrt{2}\,i$

13) $-3x^2 - x - 3 = 0$

Ramas	Coeficientes	Ordenada	Vértice
	a = -3 b = -1 c = -3	-3	Vx = $-\frac{1}{6}$ Vy = ?

R_1:	$-\frac{1}{6} + \frac{\sqrt{35}}{6} i$
R_2:	$-\frac{1}{6} - \frac{\sqrt{35}}{6} i$

14) $x^2 + 4x + 12 = 0$

Ramas	Coeficientes	Ordenada	Vértice
	a = 1 b = 4 c = 12	12	Vx = -2 Vy = 8

R_1:	$-2 + 2\sqrt{2}\,i$
R_2:	$-2 - 2\sqrt{2}\,i$

15) $x^2 + 16 = 0$

Ramas	Coeficientes	Ordenada	Vértice	Raíces
∪	a = 1 b = 0 c = 16	16	Vx = 0 Vy = 15	R_1: **-4i** R_2: **4i**

16) $x^2 + 25 = 0$

Ramas	Coeficientes	Ordenada	Vértice	Raíces
∪	a = 1 b = 0 c = 25	25	Vx 0 Vy 25	R_1: **-5i** R_2: **5i**

17) $3x^2 + 12 = 0$

Ramas	Coeficientes	Ordenada	Vértice	Raíces
∪	a = 3 b = 0 c = 12	12	Vx = 0 Vy = 12	R_1: **-2i** R_2: **2i**

18) $-3x^2 - 12 = 0$

Ramas	Coeficientes	Ordenada	Vértice	Raíces
∩	a = -3 b = 0 c = -12	-12	Vx = 0 Vy = -12	R_1: **-2i** R_2: **2i**

19) $\frac{1}{2}x^2 - 3x + 5 = 0$

Ramas	Coeficientes	Ordenada	Vértice	Raíces
∪	a = 1/2 b = -3 c = 5	5	Vx = 3 Vy = $\frac{1}{2}$	R_1: **3+i** R_2: **3-i**

20) $-\frac{1}{2}x^2 - 3x - 5 = 0$

Ramas	Coeficientes	Ordenada	Vértice	Raíces
∩	a = -1/2 b = -3 c = -5	-5	Vx = -3 Vy = $-\frac{1}{2}$	R_1: **-3+i** R_2: **-3-i**

AFIJO DE UN NÚMERO COMPLEJO
(COMO PARES ORDENADOS)

El afijo de un número complejo es el punto que se le hace corresponder en el plano y se representa como un par ordenado (x,y). El afijo del número complejo z=a+bi es el punto P(a,b).

En donde:
- "**a**" será la Parte entera del número complejo **Z**.
- "**b**" **será** la parte Imaginaria del número complejo **Z**.

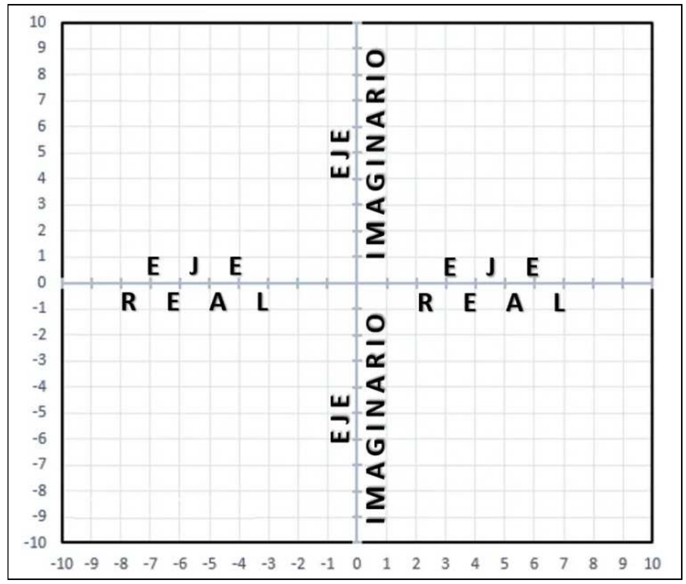
A continuación, veamos algunos ejemplos ilustrados, ya que el tema es muy simple. Entonces, llamaremos o identificaremos como Z_n a cada número complejo.

Presta Atención a los ejemplos, que ahora solo debes entenderlo.

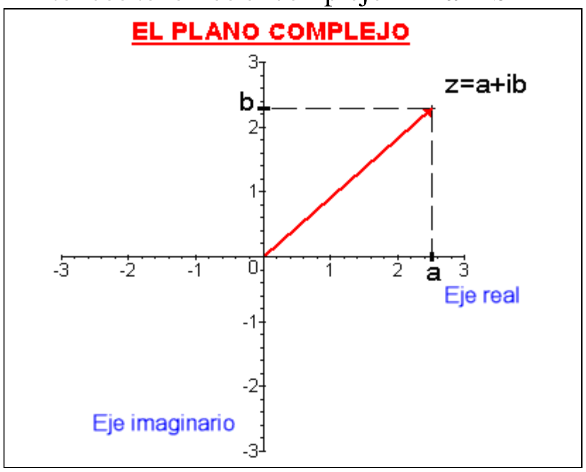
21)	$z_1 = 2 + 3i$	**R:** $z_1 = (2, 3)$	**22)**	$z_2 = \frac{3}{4} + 2i$	**R:** $z_2 = \left(\frac{3}{4}, 2\right)$
23)	$z_3 = -1 + \sqrt{5}\,i$	**R:** $z_3 = \left(-1, \sqrt{5}\right)$	**24)**	$z_4 = \frac{1}{3}i$	**R:** $z_4 = \left(0, \frac{1}{3}\right)$
25)	$z_5 = -i$	**R:** $z_5 = (0, -1)$	**26)**	$z_6 = \frac{5}{6} - \frac{1}{2}i$	**R:** $z_6 = \left(\frac{5}{6}, \frac{-1}{2}\right)$

REPRESENTACIÓN GRÁFIFA DE NÚMEROS COMPLEJOS

La representación grafica de un complejo, es similar a la de cualquier vector, ya que disponemos del Afijo y simplemente usaremos un sistema de ejes cartesianos, en donde el eje de las **ordenadas** representara la **parte compleja** y las **abscisas** la **parte entera** del número complejo.



Entonces tenemos el complejo **Z = a + bi**

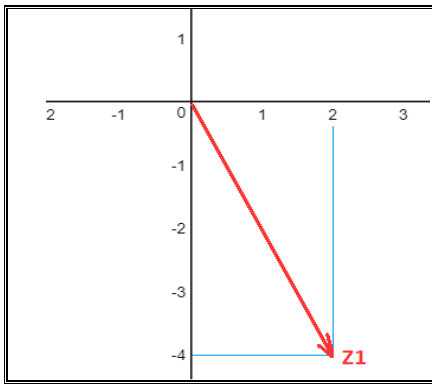


Para representar un **Z = a + bi** se dibuja en el plano el vector asociado a Z que es el vector con origen **(0 , 0)** y extremo el punto **(a , b)**.

Es decir, se toma la parte real del complejo y se marca en el eje real, luego se toma la parte imaginaria y se marca en el eje imaginario. Se trazan paralelas a los ejes que pasen por cada uno de los puntos marcados y la intersección de dichas paralelas es el número que queríamos representar.

Vamos a verlo con varios ejemplos resueltos.

27) **R**epresentar gráficamente el número complejo $z_1 = 2 - 4i$

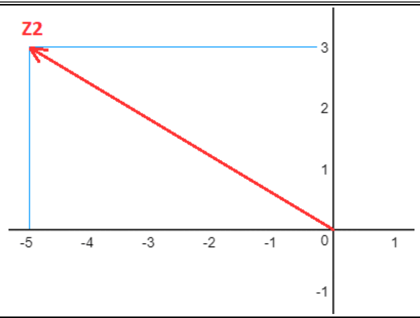


La parte real del número complejo es 2, luego desde el punto 2 del eje real, trazamos una línea vertical. La parte imaginaria es -4, por lo que desde el punto -4 del eje imaginario trazamos una línea horizontal.

Recordemos que el punto donde se corten ambas líneas, será el extremo del número complejo, llamado afijo.

$Z_1 = (2,-4)$

28)	**R**epresentar gráficamente el número complejo $z_2 = -5+3i$

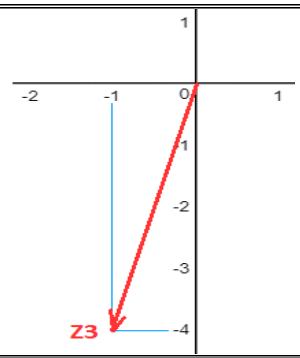


Ahora la parte real del número complejo es -5, por tanto, desde el punto -5 del eje real, trazamos una línea vertical. La parte imaginaria es 3, por lo que desde el punto 3 del eje imaginario trazamos una línea horizontal.

Recordemos que el punto donde se corten ambas líneas, será el extremo del número complejo, llamado afijo.

$Z_2 = (-5,3)$

29)	**R**epresentar gráficamente el número complejo $z_3 = -1-4i$



La parte real del número complejo es -1, por tanto, desde el punto -1 del eje real, trazamos una línea vertical. La parte imaginaria es -4, por lo que desde el punto -4 del eje imaginario trazamos una línea horizontal.

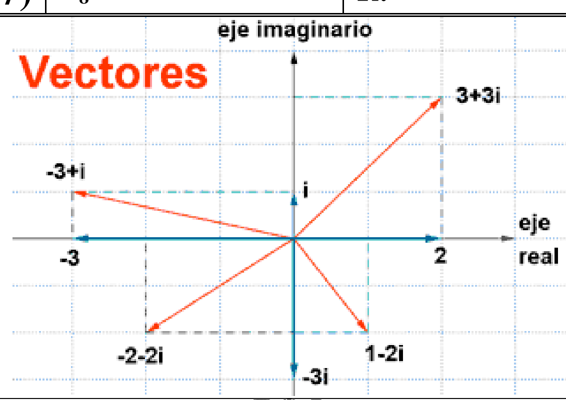
Recordemos que el punto donde se corten ambas líneas, será el extremo del número complejo, llamado afijo.

$Z_3 = (-1,-4)$

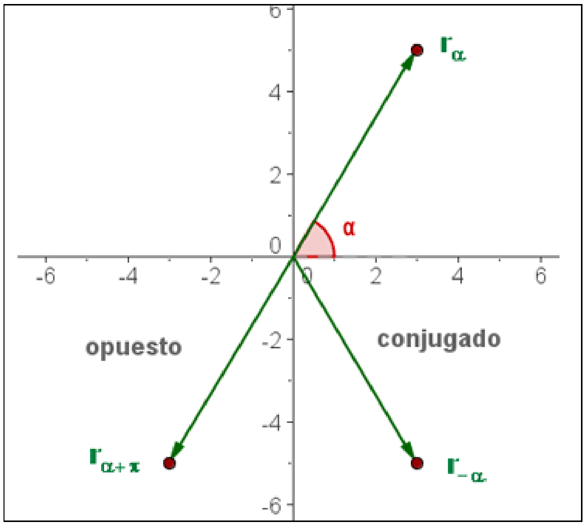
Escribir los Afijos (Vectores) de cada número complejo y reprensarlo gráficamente.

	Número		Afijo/Vector		Número		Afijo/Vector
30)	$Z_1 = -3$	**R:**		**31)**	$Z_2 = 2$	**R:**	
32)	$Z_3 = -3i$	**R:**		**33)**	$Z_4 = i$	**R:**	
34)	$Z_5 = 3+3i$	**R:**		**35)**	$Z_6 = -3+i$	**R:**	
36)	$Z_7 = -2-2i$	**R:**		**37)**	$Z_8 = 1-2i$	**R:**	

Luego de resolver y graficar en tu carpeta, puedes verificar y realizar autocorrección de tus resultados.



Números complejos iguales, opuestos y conjugados



Iguales: Dos números complejos son Iguales si sus términos son iguales.

Opuestos: Dos números Complejos son opuestos, si cada término tiene el signo opuesto de su homónimo.

Complejos Conjugados: El conjugado de z = a + bi se define así: z = a – bi y además, ambos números, son simétricos respecto del eje real, como muestra la figura.

<u>**Recordar:** Simétricos respecto del eje real</u>, quiere decir que si dobláramos el grafico por el eje "x" o eje real, las representaciones de los números Conjugados, se sobreponen

38) Dar tres ejemplos de cada tipo de número complejo (Iguales, opuestos y conjugados) y realizar la grafica correspondiente de cada ejemplo**.**