SIMPLIFICACIÓN DE FRACCIONES ALGEBRAICAS

(Resumen: Castelli Horacio P.)

Para todos los ejercicios, deberás escribir el enunciado, y el ejercicio propuesto en su carpeta, también deberás realizar y escribir claramente todos los pasos necesarios para llegar al resultado.

Queda a cargo del alumno hacer la auto corrección de todos los ejercicios, para eso dispone del resultado en todos los casos.

Los ejercicios resueltos, están para que el alumno los analice y entienda el procedimiento.

1) Simplificar las siguientes Fracciones Algebraicas Racionales. Siempre escribe claramente en tu carpeta, todos los pasos necesarios para llegar al resultado. **Presta atención**, que hay pequeñas diferencias entre los ejercicios.

Tú deberás realizar la auto corrección de todos los ejercicios, para eso dispones de los resultados.

a) $\dfrac{5x}{10x}$

Un regalo, solo hay que simplificar!. o puedes extraer factor común "5x" del numerador y denominador, simplificando finalmente.

R: $\dfrac{1}{2}$

b) $\dfrac{6x+20}{2x+10}$

Aplicas el primer caso (factor común) "2" del numerador y denominador, simplificando finalmente.

R: $\dfrac{3x+10}{x+5}$

c) $\dfrac{4x^3}{2x^2+3x}$

Simplemente factor común "x" en el numerador y denominador y luego.....

R: $\dfrac{4x^2}{2x+3}$

d) $\dfrac{6x^2-7x-3}{2x^3-3x^2}=$

R: $\dfrac{3x+1}{x^2}$

En el numerador aplicaremos el segundo caso (**Factor Común por Grupos**), continuando con el denominador, aplicaremos el primer caso (**Factor común**) y extraigo "$\mathbf{x^2}$".

Entonces, como factoreamos el numerador:

Polinomio original	$6x^2 - 7x - 3$
Separamos "-7x" como la suma de dos factores	$6x^2 + 2x - 9x - 3$
Agrupo	$(6x^2 + 2x) + (-9x - 3)$
Extraigo factor común en ambos grupos	$2x(3x-1) - 3(3x+1)$
Nuevamente extraigo factor común	**(2x-3).(3x+1)**

Finalizo simplificando el factor **(2x-3)**

$$\frac{6x^2-7x-3}{2x^3-3x^2}=\frac{\cancel{(2x-3)}\,(3x+1)}{x^2\,\cancel{(2x-3)}}=\frac{3x+1}{x^2}$$

e) $\dfrac{x^2-4}{3x-6}=$

R: $\dfrac{(x+2)}{3}$

Hay que factorizar todo lo que se pueda, tanto en el numerador como en el denominador. en este ejemplo, en el numerador deberá aplicar el 5to Caso (**Diferencia de Cuadrados**); luego en el denominador, el 1er Caso (**Factor Común**).

Finalmente podrá simplificar los polinomios que "aparezcan repetidos", siempre tachando "uno de arriba con uno de abajo", como en este caso el binomio (x - 2).

$$\frac{x^2-4}{3x-6}=\frac{(x+2).(x-2)}{3.(x-2)}=\frac{(x+2).\cancel{(x-2)}}{3.\cancel{(x-2)}}=\frac{(x+2)}{3}$$

f) $\dfrac{6x^4-7x^3-3x^2}{2x^3-3x^2}$

Simplemente factor común "x" en el numerador y denominador y luego.....

R: 3x + 1

g) $\frac{x^2+6x+9}{x^2+8x+15} =$

R: $\frac{x+3}{x+5}$

En este ejemplo aplicaremos en ambos miembros (numerador y denominador) el tercer caso (**Trinomio de Cuadrado Perfecto**).

Finalizamos simplificando el termino (x+3).

$$\frac{x^2+6x+9}{x^2+8x+15} = \frac{\cancel{(x+3)}\,(x+3)}{\cancel{(x+3)}\,(x+5)} = \frac{x+3}{x+5}$$

h) $\frac{x^2-9}{x+3} =$

R: (x - 3)

En este ejemplo aplicaremos en el numerador el quinto caso (**Diferencia de Cuadrados**), en el denominador no es necesario factorizar. A continuación se simplificó el único polinomio que había en el denominador.

El resultado es lo que queda sin tachar en el numerador de la fracción, el uno directamente no lo pondremos ya que no afecta nada.

$$\frac{x^2-9}{x+3} = \frac{(x+3).(x-3)}{(x+3)} = \frac{\cancel{(x+3)}.(x-3)}{\cancel{(x+3)}} = \frac{(x-3)}{1} = (x-3)$$

i) $\frac{x^2-9}{x^2+5x+6}$

R: $\frac{x-3}{x+2}$

En este ejemplo aplicaremos en el <u>numerador</u> el quinto caso (**Diferencia de Cuadrados**) y en el <u>denominador</u> aplicaremos el segundo caso (**Factor Común por Grupos**). Veamos el paso a paso.

Paso a paso de la factorización del NUMERADOR		Paso a paso de la factorización del DENOMINADOR	
Partimos de:	x^2 - 9	Partimos de:	$x^2 + 5x + 6$
Verifico que cumpla la condición	(x).(x) + (3).(-3)	Separo en dos grupos y para esto expreso "**5x = 2x + 3x**".	$x^2 + 2x + 3x + 6$
Entonces, por definición	**(x+3).(x-3)**	A cada grupo lo pongo entre paréntesis, solo para visualizarlos mejor.	$(x^2 + 2x) + (3x + 6)$
Verifico aplicando propiedad distributiva, que llego al polinomio original	(x+3).(x-3) = xx+3x-3x+(3)(-3) = x^2 - 9	Extraigo factor común en cada grupo	x.(x + 2) + 3.(x + 2)
		Nuevamente extraigo factor común, esta vez **"(x+2)"**	**(x+2).(x+3)**

Reemplazo cada polinomio factorizado en la fracción original. Y a continuación se simplifica (tachando) el factor "(x+3)" que es común al numerador y denominador.

El resultado es lo que queda sin tachar en la fracción.

$$\frac{x^2-9}{x^2+5x+6} = \frac{(x-3)(x+3)}{(x+2)(x+3)} = \frac{(x-3)\cancel{(x+3)}}{(x+2)\cancel{(x+3)}} = \frac{x-3}{x+2}$$

j) $\frac{x-4}{x^2-16} =$

R: $\frac{1}{(x+4)}$

En este ejemplo no hay nada que factorizar en el numerador, y en el denominador aplicamos el quinto caso. Ahora podemos simplificar el único polinomio que hay en el numerador con su igual del denominador.

Entonces la fracción queda con un "**1**" como numerador, y ya no hay mas nada para simplificar.

$$\frac{x-4}{x^2-16} = \frac{(x-4)}{(x+4).(x-4)} = \frac{\cancel{(x-4)}}{(x+4).\cancel{(x-4)}} = \frac{1}{(x+4)}$$

k) $\frac{x^2-6x+9}{5x-15} =$

R: $\frac{(x-3)}{5}$

En el numerador aplicamos tercer caso (**Trinomio Cuadrado Perfecto**) y en denominador el primer caso (**Factor Común**).

A continuación eliminamos factores homólogos del numerador y denominador, o lo que igual, eliminamos el cuadrado del numerador con el binomio homólogo del denominador.

$$\frac{x^2-6x+9}{5x-15} = \frac{(x-3)^2}{5.(x-3)} = \frac{(x-3)^{\cancel{2}}}{5.\cancel{(x-3)}} = \frac{(x-3)}{5}$$

l) $\frac{5x^2-30x+45}{5x-15}$ | R: x-3

m) $\frac{x^3+5x}{x^4+2x^3}=$ | R: $\frac{(x^2+5)}{x^2.(x+2)}$

Tanto en el numerador como en el denominador, aplico el primer caso (extraigo factor común) y simplifico.	$\frac{x^3+5x}{x^4+2x^3}=\frac{x.(x^2+5)}{x^3.(x+2)}=\frac{\cancel{x}.(x^2+5)}{x^{\cancel{3}2}.(x+2)}=\frac{(x^2+5)}{x^2.(x+2)}$

n) $\frac{6x-18}{8x+16}=$ | R: $\frac{3.(x-3)}{4.(x+2)}$

Tanto en el numerador como en el denominador aplico el primer caso (**extraigo factor común**) y solo puedo simplificar los números, aunque si queda una fracción algebraica más clara.	$\frac{6x-18}{8x+16}=\frac{6.(x-3)}{8.(x+2)}=\frac{\cancel{6}^3.(x-3)}{\cancel{8}^4.(x+2)}=\frac{3.(x-3)}{4.(x+2)}$

o) $\frac{x^2+3x}{x^2+5x}$ | R: $\frac{x+3}{x+5}$

Tanto en el numerador como en el denominador aplico el primer caso (**extraigo factor común**) y simplifico la "x" del numerador y denominador.	$\frac{x^2+3x}{x^2+5x}=\frac{x(x+3)}{x(x+5)}=\frac{\cancel{x}(x+3)}{\cancel{x}(x+5)}=\frac{x+3}{x+5}$

p) $\frac{x^3+6x^2+12x+8}{x^3+4x^2+4x}=$ | R: $\frac{(x+2)}{x}$

En el numerador aplico el cuarto caso (**Cuatrinomio Cubo Perfecto**) y en el denominador el primer caso (extraigo **factor común**) permitiendo eliminar en ambos miembros $(\mathbf{x+2})^2$.	$\frac{x^3+6x^2+12x+8}{x^3+4x^2+4x}=\frac{(x+2)^3}{x.(x+2)^2}=\frac{(x+2)^{\cancel{3}1}}{x.\cancel{(x+2)^2}}=\frac{(x+2)}{x}$

q) $\frac{x^2+10x+25}{x^2-25}=$ | R: $\frac{x+5}{x-5}$

En el numerador se aplica el tercer caso (**trinomio cuadrado perfecto**) y en el denominador el quinto caso (**Diferencia de Cuadrados**), a continuación se simplifica.	$\frac{x^2+10x+25}{x^2-25}=\frac{(x+5)^2}{(x+5).(x-5)}=\frac{(x+5)^{\cancel{2}}}{\cancel{(x+5)}.(x-5)}=\frac{x+5}{x-5}$

r) $\frac{x^4+6x^3+12x^2+8x}{x^3+4x^2+4x}$

<u>**Puedes resolver de dos formas:**</u>
a- Caso I y Cuatrinomio/ Caso I y Trinomio
b- Fuffini/Ruffini

R: **(x+2)**

s) $\frac{x^3-4x}{x^3+2x^2}=$ | R: $\frac{x-2}{x}$

En el numerador aplico dos casos, primero extraigo "**x**" como **Factor Común**, y luego el quinto caso (**Diferencia de Cuadrados**).

A continuación en el denominador, aplico el primer caso (**Factor común**) y extraigo "$\mathbf{x^2}$".	$\frac{x^3-4x}{x^3+2x^2}=\frac{x.(x+2).(x-2)}{x^2.(x+2)}=\frac{\cancel{x}.\cancel{(x+2)}.(x-2)}{x^{\cancel{2}}.\cancel{(x+2)}}=\frac{x-2}{x}$

t) $\frac{6x^2+24x+24}{2x^2-8}=$ | R: $\frac{3.(x+2)}{(x-2)}$

En el numerador se aplicas dos casos, primero extraemos un **factor común** (Primer Caso), luego el tercer caso (**Trinomio Cuadrado Perfecto**) y en el denominador comenzamos con el primer caso (**Factor Común**), también aplicaremos el quinto caso (**Diferencia de Cuadrados**).

Finalizamos simplificando números y factores. $\frac{6x^2+24x+24}{2x^2-8}=\frac{6.(x+2)^2}{2.(x+2).(x-2)}=\frac{\cancel{6}^3.(x+2)^{\cancel{2}}}{\cancel{2}^1.\cancel{(x+2)}.(x-2)}=\frac{3.(x+2)}{(x-2)}$

u) $\frac{3x^3+3}{2x^2+4x+2}=$ R: $\frac{3.(x^2-x+1)}{2.(x+1)}$

En el numerador, aplicaremos dos casos de factoreo, Primer Caso (**Factor Común**) y Sexto Caso (**Suma o Resta de Potencias de Igual Grado**), luego en el denominador, nuevamente aplicaremos dos casos, comenzamos con el Primer Caso (**Factor Común**) y continuamos con el Tercer Caso (**Trinomio Cuadrado Perfecto**).

Finalizamos simplificando en ambos términos el factor **(x+1),** $\frac{3x^3+3}{2x^2+4x+2}=\frac{3.(x+1).(x^2-x+1)}{2.(x+1)^2}=\frac{3.\cancel{(x+1)}.(x^2-x+1)}{2.(x+1)^{\cancel{2}}}=\frac{3.(x^2-x+1)}{2.(x+1)}$

2) Un breve desafío

a) $\frac{2x^3-8x^2+8x}{2x^2-4x}$ R: (x-2)

b) $\frac{2x^3-18x}{2x^2+6x}$ R: (x-3)

c) $\frac{2x^2+2x}{2x^3-2x}$ R: $\frac{1}{x-1}$

d) $\frac{2x^2-4x}{2x^3-8x}$ R: $\frac{1}{x+2}$

e) $\frac{2x^3+6x^2-2x-6}{2x^2-2}$ R: (x+3)

f) $\frac{2x^3-2x^2-18x+18}{2x^2-18}$ R: (x-1)

g) $\frac{3x^3+6x^2-3x-6}{3x^2-3}$ R: (x+2)

h) $\frac{2x^3+2x^2-8x-8}{2x^2-8}$ R: (x+1)

3) **Solo para los que practicaron.** Simplifica las siguientes fracciones algebraicas.

a) $\dfrac{-4x^2+16x-16}{2x^3-2x^2-16x+24}$

Veamos y Analicemos Paso a Paso
(Este es solo para los que quieren saber hacer)

R:	$-\dfrac{2}{x+3}$

$$\underbrace{\frac{-4x^2+16x-16}{2x^3-2x^2-16x+24}}_{0}=\underbrace{\frac{\cancel{2}(-2x^2+8x-8)}{\cancel{2}(x^3-x^2-8x+12)}}_{1}=\underbrace{\frac{-2(x^2-4x+4)}{x^3-2x^2+x^2-2x-6x+12}}_{2}=\underbrace{\frac{-2(x-2)^2}{x^2(x-2)+x(x-2)-6(x-2)}}_{3}=$$

Paso 0) Planteo de la ecuación dada. **Paso 1)** Extraigo factor común 2(dos) de ambos miembros y simplifico. **Paso 2)** <u>Numerador:</u> Nuevamente extraigo factor común 2(dos). <u>Denominador:</u> Tomo lo que quedo en el "Paso 1" y pienso todo el denominador "$x^3 - x^2 -8x +12$" como dos partes que se suman y en el proceso veo "$-x^2 = x^2 - 2x^2$" y que "$-8x = -2x -6x$", entonces el denominador queda "$x^3 + x^2 - 2x^2 - 2x$" más "$-6x + 12$". Alto por un momento y analízalo bien. **Paso 3)** <u>Numerador:</u> aplico Trinomio Cuadrado Perfecto (Tercer caso), a todo lo que se encuentra dentro del paréntesis. <u>Denominador</u>: Ahora a la primera parte "$x^3 + x^2 - 2x^2 - 2x$" la separaré nuevamente en dos grupos $(x^3 + x^2)+(- 2x^2 - 2x)$ de donde extraeré Factor común de ambas partes quedando "$x^2.(x - 2) + x.(x - 2)$". Pero hay que recordar que todavía queda un pedacito de la ecuación "$-6x + 12$" a la que también extraeré factor común y queda como "$-6(x-2)$". Juntando todas las partes del denominador queda, "$x^2.(x - 2) + x.(x - 2) - 6(x-2)$". Ahora, si entendiste todo hasta acá, entonces continua con el paso 4.

$$\underbrace{\frac{-2(x-2)^{\cancel{2}}}{\cancel{(x-2)}(x^2+x-6)}}_{4}=\underbrace{\frac{-2(x-2)}{x^2+x-6}}_{5}=\underbrace{\frac{-2(x-2)}{x^2+3x-2x-6}}_{6}=\underbrace{\frac{-2(x-2)}{x(x+3)-2(x+3)}}_{7}=\underbrace{\frac{-2\cancel{(x-2)}}{(x+3)\cancel{(x-2)}}}_{8}=\underbrace{\frac{-2}{x+3}}_{9}$$

Paso 4) Analicemos primero el <u>Denominador:</u> donde extraigo factor común "(x-2).(x2+x-6)". <u>Numerador:</u> Simplificamos el cuadrado de $(x-2)^2$ con el (x-2) del denominador. **Paso 5)** Solamente escribo la ecuación resultante del paso anterior. **Paso 6)** <u>Numerador:</u> Sin cambios. <u>Denominador:</u> Preparo todo el denominador para extraer factor común por grupos, es decir escribo que "$x = 3x - 2x$". **Paso 7)** <u>Numerador:</u> Sin cambios. <u>Denominador:</u> realizo la primera parte del segundo caso (Factor Común por Grupos).

$$\frac{-4(x-2)^2}{2(x-2)^2\times(x+3)}$$

Esta es otra alternativa de solución. Se te ocurre algo?

Paso 8) <u>Numerador:</u> Sin cambios. <u>Denominador:</u> Completo el segundo paso del Factor Común por Grupos (segundo caso) y simplifico "(x-2)" del numerador y denominador. **Paso 9)** Escribo la ecuación resultante y Terminamos.

---

b) $\dfrac{\frac{1}{2}x^2+\frac{1}{8}x}{\frac{1}{3}x+\frac{1}{12}}=$

Veamos y Analicemos Paso a Paso
(Este es solo para los que quieren saber hacer)

R:	$\dfrac{3x}{2}$

Aparenta ser una fracción muy complicada, pero solo hay que aplicar el primer caso (**Factor Común**) en el numerador y denominador, luego simplificar y dividir las fracciones (**regla del colectivo o doble C**) quedando una expresión muy simple.

$$\frac{\frac{1}{2}x^2+\frac{1}{8}x}{\frac{1}{3}x+\frac{1}{12}}=\frac{\frac{1}{2}x.(x+\frac{1}{4})}{\frac{1}{3}.(x+\frac{1}{4})}=\frac{\frac{1}{2}x.\cancel{(x+\frac{1}{4})}}{\frac{1}{3}.\cancel{(x+\frac{1}{4})}}=\frac{3}{2}x$$

---

c) $\dfrac{2x^5-32x}{2x^3+8x}$

R:	(x+2).(x-2)

---

d) $\dfrac{3x^7-75x}{3x^4-15x}$

R:	(x^3+5)

---

e) $\dfrac{x^3-4x}{x^5+4x^3-32x}=$

(Un pequeño desafío)

R:	$\dfrac{1}{x^2+8}$

RESOLVER Y COMPLETAR EXPLICACIÓN

$$\frac{x^3-4x}{x^5+4x^3-32x}=\frac{x(x^2-4)}{x(x^4+4x^2-32)}=\frac{x(x-2)(x+2)}{x(x^2-4)(x^2+8)}=\frac{\cancel{x(x-2)(x+2)}}{\cancel{x(x-2)(x+2)}\,(x^2+8)}=\frac{1}{x^2+8}$$

---

f) $\dfrac{6x^3-24x^2+30x-120}{9x^4+36x^2-45}=$

Veamos y Analicemos Paso a Paso

(Este es solo para los que quieren saber hacer)

R: $\dfrac{2x-8}{3x^2-3}$

$$\underbrace{\frac{6x^3-24x^2+30x-120}{9x^4+36x^2-45}}_{0}=\underbrace{\frac{\cancel{3}\left(2x^3-8x^2+10x-40\right)}{\cancel{3}\left(3x^4+12x^2-15\right)}}_{1}=\underbrace{\frac{2\left(x^3-4x^2+5x-20\right)}{3\left(x^4+4x^2-5\right)}}_{2}=\underbrace{\frac{2\left(x^2(x-4)+5(x-4)\right)}{3\left(x^4+5x^2\quad x^2-5\right)}}_{3}$$

Paso 0) Planteo de la ecuación dada. **Paso 1)** Extraigo factor común de ambos miembros y simplifico. **Paso 2)** nuevamente, extraigo factor común en ambos miembros. **Paso 3)** Numerador: Aplico segundo caso (factor común por grupos), primera parte. Denominador: Se aplicara el segundo caso (factor común por grupos), para lo que presento "$\mathbf{4x^2}$" como la suma de dos factores "$\mathbf{5x^2 - x^2}$".

$$\underbrace{\frac{2(x-4)\left(x^2+5\right)}{3\left(x^2\left(x^2-1\right)+5\left(x^2-1\right)\right)}}_{4}=\underbrace{\frac{2(x-4)\cancel{\left(x^2+5\right)}}{3\cancel{\left(x^2+5\right)}\left(x^2-1\right)}}_{5}=\underbrace{\frac{2x-8}{3x^2-3}}_{6}=\underbrace{\frac{2(x-4)}{3\left(x^2-1\right)}}_{7}$$

Paso 4) Numerador: Completo el segundo caso de factoreo iniciado en el paso anterior. Denominador: continúan los pasos del segundo caso de Factoreo, agrupo y extraigo factor común de cada grupo. **Paso 5)** Numerador: Continúa sin cambios, pero se simplificará $\mathbf{(x^2+5)}$ con su homólogo del denominador, apenas este completo la factorización que se esta haciendo. Denominador: extraigo nuevamente factor común, terminando con esto la extracción de factor común por grupos, encontrando que se debe simplificar el termino $\mathbf{(x^2+5)}$ del numerador y denominador. **Pasos 6 y 7)** dos posibles resultados, ambos están bien.

---

g) $\dfrac{x^7-x^6-4x+4}{x^4-x^3-2x+2}$

Con poca explicación.

R: x^3+2

En el numerador y denominador extraigo factor común por grupos.

$$\frac{x^6(x-1)-4(x-1)}{x^3(x-1)-2(x-1)}=\frac{\left(x^6-4\right)\times(x-1)}{\left(x^3-2\right)\times(x-1)}=$$

En el denominador, puedo desarrollar el caso V (Diferencia de cuadrados) y para finalizar simplifico

$$\frac{\left(x^3+2\right)\left(x^3-2\right)(x-1)}{\left(x^3-2\right)(x-1)}=\frac{\left(x^3+2\right)\cancel{\left(x^3-2\right)}\cancel{(x-1)}}{\cancel{\left(x^3-2\right)}\cancel{(x-1)}}=\left(x^3+2\right)$$

---

v) $\dfrac{x^2-6x+27}{2x^2-19x+9}=$

R: $\dfrac{x+3}{2x-1}$

En este caso, aplicamos en el numerador y denominador el segundo caso (**Factor Común por Grupos**).

Factoreamos el numerador:	Polinomio original	$x^2 - 6x + 27$
	Separamos "-6x" como la suma de dos factores	$x^2 +3x - 9x + 27$
	Agrupo	$(x^2 +3x)+(- 9x + 27)$
	Extraigo factor común en ambos grupos	$x(x+3) - 9(x+3)$
	Nuevamente extraigo factor común	$\mathbf{(x-9)(x+3)}$
Factoreamos el Denominador:	Polinomio original	$2x^2 - 19x + 9$
	Separamos "-7x" como la suma de dos factores	$2x^2 - x - 18x + 9$
	Agrupo	$(2x^2 - x) + (-18x + 9)$
	Extraigo factor común en ambos grupos	$2x(x-9) - (x-9)$
	Nuevamente extraigo factor común	$\mathbf{(x-9)(2x-1)}$

Finalizo simplificando el factor **(x-9)**	$\frac{x^2-6x+27}{2x^2-19x+9}=\frac{\cancel{(x-9)}(x+3)}{\cancel{(x-9)}(2x-1)}=\frac{x+3}{2x-1}$

h) $\frac{4x^2+4x+1}{2x^2-7x-4}$

R:	$\frac{2x+1}{x-4}$

El numerador es fácil, solo es un Trinomio Cuadrado Perfecto	$4x^2 + 4x + 1 = (2x+1)^2$

El denominador, es un Factor Común en Grupos.	**1)** $2x^2 - 7x - 4 = 2x^2-8x + x-4$ **2)** $= 2x(x-4) + 1(x-4)$ **3)** $= (x-4)(2x-1)$

Reemplazamos los polinomios factorizados en la ecuación dada y nos quedará:	$\frac{(2x+1)^2}{(x-4)\times(2x+1)}$

Ahora solo queda simplificar, obteniendo el resultado	$\frac{2x+1}{x-4}$