Factorización Polinómica (Caso V)

(Diferencia de Cuadrados)

(Resumen: Castelli Horacio P.)

Para todos los ejercicios, deberás escribir el enunciado, y el ejercicio propuesto en su carpeta, también deberás realizar y escribir claramente todos los pasos necesarios para llegar al resultado.

Queda a cargo del alumno hacer la auto corrección de todos los ejercicios, para eso dispone del resultado en todos los casos.

Los ejercicios resueltos, están para que el alumno los analice y entienda el procedimiento.

En las matemáticas y álgebra computacional, la Factorización de polinomios o Factorización Polinómica (también simplemente **Factorear**) se refiere a "encontrar factores que al multiplicarlos entre si, den como resultado el polinomio".

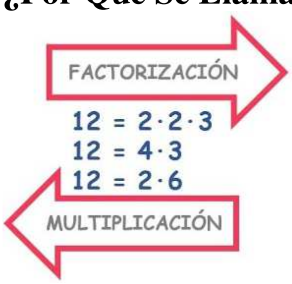
En todos los casos, partimos de un polinomio (expresión formada por sumas y/o restas de términos o monomios), por ejemplo $\mathbf{x^2 - 9}$. Entonces, factorizar consistirá en encontrar una expresión equivalente, pero expresada como una multiplicación de elementos más simples. Y que para nuestro ejemplo, serán:

$\mathbf{x^2 - 9}$	<u>Vemos como obtenemos el polinomio partiendo de sus factores (sin mucha explicación)</u>	R:	$\mathbf{(x + 3).(x - 3)}$

$$\mathbf{(x + 3).(x - 3)}$$

<u>Entonces</u> $\mathbf{(x + 3) .(x - 3)} = x.x - 3x + 3x - 3.3 = \mathbf{x^2 - 9}$

¿Por Qué Se Llama "Factorizar" O Factorear?



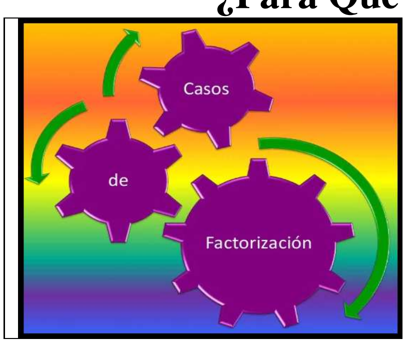
Porque a los elementos que se multiplican en un producto, se les llama "**factores**". Por ejemplo, en la multiplicación **4 x 3 = 12**, el 4 y el 3 son los "**factores**", pero no son los únicos posibles factores. Mira la imagen a la izquierda, y verás que si factorizamos el numero 12, podemos encontrar que tenemos varias posibles combinaciones de factores que componen al 12.

Regresando a los polinomios, podremos asegurar que **(x + 3)** es uno de los factores del polinomio $\mathbf{x^2 - 9}$

	Ecuación Original		Ecuación expresada como el producto de sus factores		Factorizada
Resumiendo:	$\mathbf{x^2 - 9}$	=	$\mathbf{(x + 3) .(x - 3)}$	=	$\mathbf{(x + 3) .(x - 3)}$

No desesperes...Un Poquito más abajo se explica todo paso a paso...

¿Para Qué Sirve y Como Se Factoriza Un Polinomio?



Por ejemplo, tener factorizada la fórmula de una función Polinómica, sirve para encontrar o visualizar los "ceros" o "raíces"; también para simplificar eliminando elementos comunes en el numerador y denominador de una fracción (ecuaciones polinómicas fraccionarias). En muchas ocasiones, factorizar nos permite trabajar con multiplicaciones en vez de sumas y restas.

Finalmente, Factorizar Polinomios nos mantienen ocupados por un largo rato... **Existen varios métodos de Factorización, entre los cuales hay un caso especial, que acá estudiaremos**:

Factorización Polinómica (Caso V)

(Diferencia de Cuadrados)

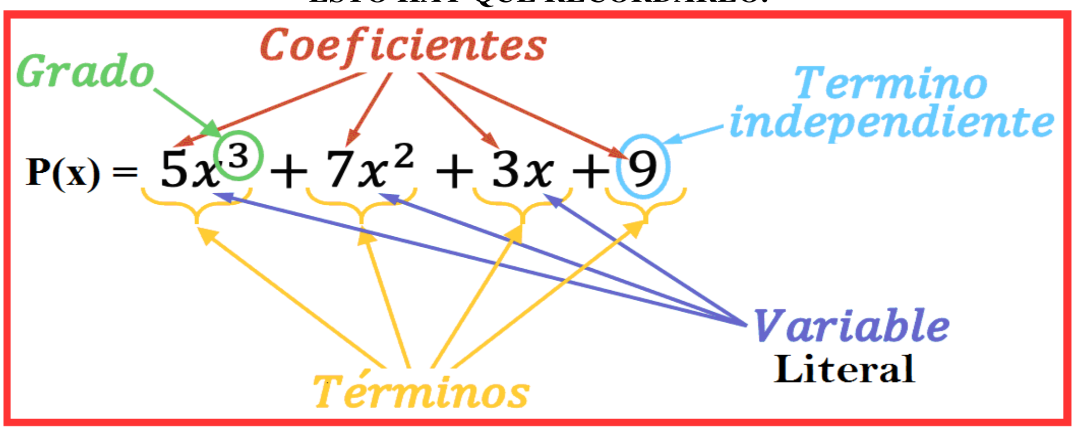
(Resumen: Castelli Horacio P.)

1)	**Primer Caso:**	Factor Común.
2)	**Segundo Caso:**	Factor Común en Grupos.
3)	**Tercer Caso:**	Trinomio Cuadrado Perfecto.
4)	**Cuarto Caso:**	Cuatrinomio Cubo Perfecto.
5)	**Quinto Caso:**	Diferencia de Cuadrados.
6)	**Sexto Caso:**	Sumas o Restas de Potencias de Igual Grado.
7)	**Método de Gauss**	**Factoreo.**

De todos estos casos, en esta guía estudiaremos el Quinto Caso: **Diferencia de Cuadrados**.

Y es importante destacar, que aunque es muy simple factorizar, lo más importante es comprender que, solo la práctica nos permitirá reconocer cuando estamos en presencia de un caso u otro, en consecuencia, identificar que procedimiento aplicar.

ESTO HAY QUE RECORDARLO.



QUINTO CASO: DIFERENCIA DE CUADRADOS

Videos Recomendados	
Repaso de Binomios Conjugados (Diferencia de cuadrados)	https://youtu.be/itgFqGg6UBI
Factorización de una Diferencia de Cuadrados (Binomios Conjugados)	https://youtu.be/esbREDCXTpM

-o-

Para comenzar.

Recuerda que un número "**x**" tiene una raíz cuadrada si existe otro número más pequeño "**y**" que, al multiplicarse dos veces por sí mismo, da como resultado el primero.

$$Y . Y = X$$

$$\sqrt{X} = Y$$

Como reconozco una diferencia de cuadrados?

Muy sencillo, Si cumple las tres condiciones:

a)- Ser un binomio (tener dos términos o monomios)

b)- Los términos deben estar separada por el signo menos.

c)- Cada término debe tener una raíz cuadrada exacta.

$$\boxed{a^2 - b^2}$$

Para Tener en Cuenta.

Podemos decir que Factorizar una Diferencia de Cuadrados, es la operación inversa de multiplicar un binomio con su conjugado.

1ro 2do 3ro 4to

$$(a + b) * (a - b) = (a)^2 + \underbrace{(-\cancel{ab}) + (\cancel{ab})}_{\text{Se cancelan}} + (-b)^2$$

$$\boxed{a^2 - b^2}$$

Factorización Polinómica (Caso V)

(Diferencia de Cuadrados)

(Resumen: Castelli Horacio P.)

Y si no Recuerdas.

Acá puede ver cual es el Binomio y cual su conjugado ========>

Dado un Binomio Cualquiera, podremos generar su conjugado, si le cambiamos el signo de uno de los términos.
Y si los multiplicas (producto del *binomios y su conjugado) el resultado será* ***e*l cuadrado del primer término menos el cuadrado del segundo.**

Binomio: (a+b)

Conjugado: (a-b)

Y que debo Hacer?

Paso 1: Verifica que cumpla las tres condiciones:

a)- Ser un binomio (tener dos monomios)
b)- Los términos deben estar separada por el signo menos.
c)- Cada término debe tener una raíz cuadrada exacta.

$$a^2 - b^2 = (a+b)(a-b)$$

x^2 $- 25$	Si cumple las tres condiciones

Paso 2: Abre dos grupos de paréntesis, que se multiplicaran entre si y escribe en su interior las raíces cuadradas del primer y segundo término (en cada par de paréntesis).

$$(x \quad 5) \; . \; (x \quad 5)$$

Paso 3: Debes unir los términos del primer paréntesis con el signo "+" (más) y unir los términos del segundo paréntesis con el signo "**-**" (menos).

$$(x + 5) \; . \; (x - 5)$$

Ya terminaste

Video Recomendado	
Como Factorizar una Diferencia de Cuadrados	https://youtu.be/esbREDCXTpM

¿Cómo Puedo Saber Si Factoricé Correctamente?

Multiplicando los factores que obtuvimos tenemos que poder llegar a la misma expresión de sumas y/o restas de la que partimos. De esta forma estamos haciendo una "**verificación**". Recordemos que al factorizar, estamos obteniendo una expresión equivalente a la original, pero con distinta forma (de multiplicación).
Realicemos la verificación, con el que resolvimos durante la explicación, y resolvamos de las dos formas que conocemos hasta el momento.

Propiedad distributiva	Multiplicación de Binomios	
(x+5) (x-5) = x.x - 5x + 5x -25 **x^2 -25**	$$\begin{array}{rrrr} & & x & +5 \\ \times & & x & -5 \\ \hline & & -5x & -25 \\ + & x^2 & 5x & --- \\ \hline & x^2 & +0x & -25 \end{array}$$	R: **x^2 - 25**

1) Comencemos a Factorear. Resuelve y verifica que todos los que hagas estén correctamente resueltos. Siempre escribe claramente en tu carpeta, todos los pasos necesarios para llegar al resultado. **Presta atención**, que hay pequeñas diferencias entre los ejercicios.

Tú deberás realizar la auto corrección de todos los ejercicios, para eso dispones de los resultados.

a) **x^2 - 9** **Te muestro como resolver sin mucha explicación** R: **(x + 3).(x - 3)**

Ecuación Original			Ecuación Factorizada
x^2	-	9	= (x + 3).(x - 3)
Encuentro que cumple la condición			Verifico desarrollando..
x		3	**(x + 3).(x - 3) =** x^2-3x+3x-9

x.x	(+3).(-3)	**Resuelvo y...**
x^2	-9	x^2 -9

b) $x^2 - 4$

R: **(x+2)(x–2)**

Ecuación Original				**Ecuación Factorizada**
x^2	-	2^2	=	**(x+2)(x–2)**
Encuentro que cumple la condición				Verifico desarrollando..
x.x		**(+2).(-2)**		x2 -2x +2x -2^2
x^2		**$-(2)^2$**		**Resolvemos y....**
x^2		**-4**		**$x^2 - 2^2$**

c) $x^2 - y^2$

R: **(x + y).(x - y)**

Ecuación Original				**Ecuación Factorizada**
x^2	-	y^2	=	**(x + y).(x - y)**
Encuentro que cumple la condición				Verifico desarrollando..
x		**y**		x^2 - xy + yx $-y^2$
x.x		**(+y).(-y)**		**Resolvemos y....**
x^2		$-y^2$		$x^2 - y^2$

d) $x^2 - \frac{9}{25}$

Cuidado, Fracciones.!

R: **(x + 3/5).(x - 3/5)**

Como habrás calculado $\sqrt{9} = 3$ **y** $\sqrt{25} = 5$ Entonces, las bases son "**3**" y $\frac{3}{5}$

Porque 9 es cuadrado de 3, y 25 el cuadrado de 5.

Ecuación Original				**Ecuación Factorizada**
x^2	-	$\frac{9}{25}$	=	**(x + 3/5).(x - 3/5)**
Encuentro que cumple la condición				Verifico desarrollando..
x		$\frac{3}{5}$		x.x - x.3/5 + 3/5.x - 9/25
x.x		$\left(+\frac{3}{5}\right) \cdot \left(-\frac{3}{5}\right)$		**Resolvemos y....**
x^2		$-\frac{9}{25}$		**x^2** $-\frac{9}{25}$

e) $9x^2 - 9$

Primero Factor Comun?

R: $9(x-1)(x+1)$

f) $\frac{x^4}{4} - 9$

R: $\left(\frac{x^2}{2} - 3\right)\left(\frac{x^2}{2} + 3\right)$

g) **$b^2 - 1$** (Recordar que el cuadrado de 1 es 1) R: **(b + 1).(b - 1)**

Ecuación Original				Ecuación Factorizada
b^2	-	**1**	=	**(b + 1).(b - 1)**
Encuentro que cumple la condición				Verifico desarrollando..
b		1		b.b - b.1 + 1.b + 1.(-1)
b.b		(+1).(-1)		**Resolvemos y....**
b^2		-1		**$b^2 - 1$**

h) **$x^6 - 4$** **(Presta atensión con las potencias)** R: **$(x^3 + 2).(x^3 - 2)$**

Ecuación Original				Ecuación Factorizada
x^6	-	4	=	**$(x^3 + 2).(x^3 - 2)$**
Encuentro que cumple la condición				Verifico desarrollando..
x^3		**2**		$x^3. x^3 - x^3.2 + 2. x^3 + 4$
$x^3. x^3$		**(+2)**.(-2)		**Resolvemos y....**
x^6		-4		$x^6 - 4$

i) **$36x^2 - a^6b^4$** **(Esta vez usaremos términos "compuestos")** R: $(6x + a^3b^2).(6x - a^3b^2)$

Cuidado, que los términos pueden estar compuestos por varios factores, y no una sola letra o número. Pero todos deben cumplir con la condición.

Ecuación Original				Ecuación Factorizada
$36x^2$	-	a^6b^4	=	$(6x + a^3b^2).(6x - a^3b^2)$
Encuentro que cumple la condición			Verifico desarrollando..	
6x		a^3b^2	$6x.6x + 6x.(-a^3b^2) + a^3b^2.6x + a^3b^2.(- a^3b^2)$	
6x . 6x		$(+a^3b^2). (- a^3b^2)$	**Resolvemos y....**	
$36x^2$		$- a^6b^4$	$36x^2 - a^6b^4$	

j) **$4 - x^2$** Con todo "al revés" R: **(2 + x).(2 - x)**

En este caso, se presenta como **$-x^2 + 4$** pero es igual que se estuviera como **$4 - x^2$**, eso es indistinto y por comodidad podemos acomodar los factores como nos convenga, mostrando la resta que esperamos ver.

Ecuación Original				Ecuación Factorizada
4	-	x^2	=	**(2 + x).(2 - x)**
Encuentro que cumple la condición				Verifico desarrollando..
2		x		$2.2 - 2x + 2x - x^2$
2.2		x.(-x)		**Resolvemos y....**
4		$- x^2$		$4 - x^2$

k) $x^2 - 3$ **Y ahora?** R: $(x + \sqrt{3}).(x - \sqrt{3})$

Ecuación Original				Ecuación Factorizada
x^2	-	3	=	$(x + \sqrt{3}).(x - \sqrt{3})$
Encuentro que cumple la condición				Verifico desarrollando..
x.x	$(+\sqrt{3}).(-\sqrt{3})$			$x.x - x\sqrt{3} + x\sqrt{3} - (\sqrt{3})^2$
x^2	$-(\sqrt{3})^2$			**Resuelvo y....**
x^2	**-3**			$x^2 - 3$

l) $3x^2 - \frac{27}{25}$ **Mira con detenimiento un poco mas abajo** R: $\frac{3}{25} \times (5x - 3) \times (5x + 3)$

Al Factorizar, casi con seguridad puedo decir que, llegaste a este otro resultado $3\left(x + \frac{3}{5}\right)\left(x - \frac{3}{5}\right)$

Y esta bien, este otro resultado, pero si aprendiste bien todo lo que vimos desde el comienzo de factorización, deberías ser capas de llegar al resultado propuesto en la guía. Por esta vez, te diré cuales son los pasos (**lenguaje coloquial**), pero no los mostrare matemáticamente.

1. Factor común tres (seguro así comenzaste). Pero ahora........
2. Multiplicas y divides toda la ecuación por 25.
3. Introduces el 25 del numerador dentro del paréntesis, por lo tanto queda, afuera del paréntesis 3 dividido 25, y adentro de los paréntesis, 25 que multiplica a x^2 y 25 que multiplica a -9.
4. Simplificas donde corresponda, (eliminas el 25 del numerador con el 25 del denominador). Por lo tanto, el primero del binomio queda $25x^2$ y el segundo **-9**.
5. Ahora ya puedes aplicar el quinto caso de factorización a todo lo que esta dentro del paréntesis. y hemos logrado el resultado buscado.

m) **x - 25** R: $(\sqrt{x} + 5)(\sqrt{x} - 5)$

n) $4x - x^3$ R: x(2-x)(2+x)

o) $2x^3 - 2x$ R: 2x(x-1)(x+1)

p) $12x - 3x^3$ R: 3x(2-x)(2+x)

q) $3x^4 - 6x^3 + 3x^2$ **Cuidado, una trampa.!** R: $3x^2(x-1)^2$

r) $\frac{12}{5}x - 3x^3$ **Y Que paso?** R: $-\frac{3}{5}x\left(\sqrt{5}x + 2\right)\left(\sqrt{5}x - 2\right)$

Esto ya lo resolvimos algunos ejercicios antes... Pudiste llegar hasta acá? (Recuerda normalizar $-\frac{3}{5}x(5x^2 - 4)$

Ahora puedes aplicar el quinto caso a lo que esta dentro del paréntesis, o resuelves por Ruffini, o si prefieres con Bhaskaracharya. (jajaja no te asustes, es como deberíamos escribir Bhaskara)

2) A practicar. Encontrarás de todo un poco.

Tú deberás realizar la auto corrección de todos los ejercicios, para eso dispones de los resultados.

a) $x^3 - 3x - 2$ **R:** $(x - 2).(x + 1)^2$

Primero, separamos el ejercicio en dos grupos, como si aplicáramos el segundo caso, perooo.....	$x^3-4x + x-2$
Del primer grupo extraemos factor común **x** (Caso I)	$x.(x^2 -4) + (x -2)$
Encuentro que tengo una diferencia de cuadrados (Caso V)	$x.\mathbf{(x^2 -4)} + (x -2)$
Resuelvo, y podremos extraer factor común (x-2). Caso I	$x.(x+2).\mathbf{(x-2)} + \mathbf{(x -2)}$
Aplico propiedad distributiva en el segundo miembro	$(x-2).\mathbf{(x.(x+2) + 1)}$
Auna vez aplicada la propiedad distributiva en el segundo miembro, encuentro que puedo aplicar el tercer caso de factoreo (Trinomio Cuadrado Perfecto).	$(x-2).\mathbf{(x^2+2x+1)}$
Quedando ya resuelto	$(x - 2).(x + 1)^2$

Pero podríamos haber resuelto de otra forma más simple.
Aplicamos Ruffini (No siempre es posible, pero esta vez si).

	1	0	−3	−2
2		2	4	2
	1	2	1	0
	x^2	$2x$	1	

Encontramos $\mathbf{(x - 2)(x^2 + 2x + 1)}$

A continuación, podemos aplicar el tercer caso de factorización o aplicar dos veces más Ruffini, o incluso podemos usar la formula de Bhaskaracharya, más conocido como Bhaskara. y en cualquiera de las opciones, llegaríamos rápidamente a: $(x - 2).(x + 1)^2$

b) $4x^5 - 16x$ **Comienza aplicando el primer caso y luego....** **R:** $4x\left(x^2-2\right)\left(x^2+2\right)$

c) $2x^7 - 18x$ **R:** $\mathbf{2x.(x^3+3).(x^3-3)}$

d) $\dfrac{2x^7 - 18x}{2x^4 + 6x}$ **R:** $\mathbf{(x^3-3)}$

e) $\dfrac{3x^4 - 6x^3 + 3x^2}{3x^3 - 3x^2}$ **R:** $\mathbf{(x-1)}$

f) $9x^8 - \dfrac{4}{25}$ **R:** $\dfrac{1}{25}\left(15x^4-2\right)\left(15x^4+2\right)$

Sin Explicación.

$$\frac{25}{25}\left(9x^8 - \frac{4}{25}\right)$$

$$\frac{1}{25}\left(25 \times 9x^8 - \frac{25 \times 4}{25}\right)$$

$$\frac{1}{25}\left(5 \times 3x^4 - 2\right)\left(5 \times 3x^4 + 2\right)$$

Hay que esforzarse y practicar, serás grande y exitoso.