Factorización Polinómica (Caso IV)

(Cuatrinomio Cubo Perfecto)

(Resumen: Castelli Horacio P.)

Para todos los ejercicios, deberás escribir el enunciado, y el ejercicio propuesto en su carpeta, también deberás realizar y escribir claramente todos los pasos necesarios para llegar al resultado.

Queda a cargo del alumno hacer la auto corrección de todos los ejercicios, para eso dispone del resultado en todos los casos.

Los ejercicios resueltos, están para que el alumno los analice y entienda el procedimiento.

En las matemáticas y álgebra computacional, la Factorización de polinomios o Factorización Polinómica (también simplemente **Factorear**) se refiere a "encontrar factores que al multiplicarlos entre si, den como resultado el polinomio".

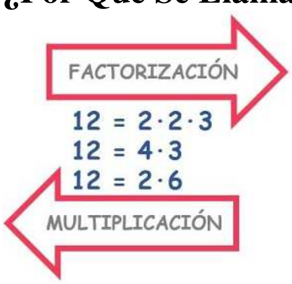
En todos los casos, partimos de un polinomio (expresión formada por sumas y/o restas de términos o monomios), por ejemplo $\mathbf{x^3 + 3x^2 + 3x + 1}$. Entonces, factorizar consistirá en encontrar una expresión equivalente, pero expresada como una multiplicación de elementos más simples. Y que para nuestro ejemplo, serán:

$\mathbf{x^3 + 3x^2 + 3x + 1}$ **<u>Te muestro como resolver sin mucha explicación</u>** R: $\mathbf{(x + 1)^3}$

$$\mathbf{(x + 1).(x + 1).(x + 1)}$$

Entonces $\mathbf{(x + 1) .(x + 1).(x + 1) = x^3 + 3x^2 + 3x + 1}$

¿Por Qué Se Llama "Factorizar" O Factorear?



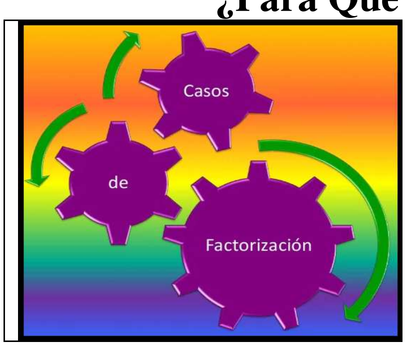
Porque a los elementos que se multiplican en un producto, se les llama "**factores**". Por ejemplo, en la multiplicación **4 x 3 = 12**, el 4 y el 3 son los "**factores**", pero no son los únicos posibles factores. Mira la imagen a la izquierda, y verás que si factorizamos el numero 12, podemos encontrar que tenemos varias posibles combinaciones de factores que componen al 12.

Regresando a los polinomios, podremos asegurar que **(x + 1)** es uno de los factores del polinomio $\mathbf{x^3 + 3x^2 + 3x + 1}$.

	Ecuación Original		Ecuación expresada como el producto de sus factores		Factorizada
Resumiendo:	$\mathbf{x^3 + 3x^2 + 3x + 1}$	=	$\mathbf{(x + 1) .(x + 1) .(x + 1)}$	=	$\mathbf{(x + 1)^3}$

No desesperes...Un Poquito más abajo se explica todo paso a paso...

¿Para Qué Sirve y Como Se Factoriza Un Polinomio?



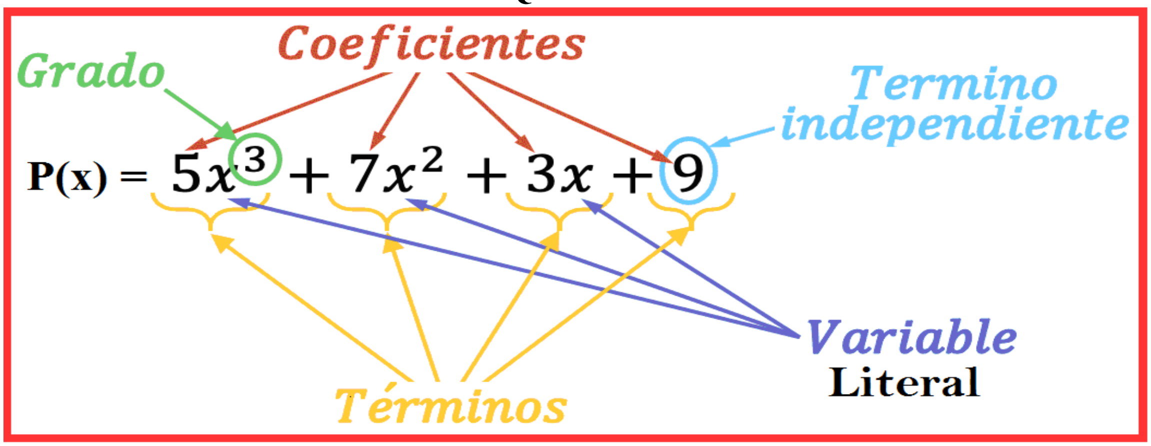
Por ejemplo, tener factorizada la fórmula de una función Polinómica, sirve para encontrar o visualizar los "ceros" o "raíces"; también para simplificar eliminando elementos comunes en el numerador y denominador de una fracción (ecuaciones polinómicas fraccionarias). En muchas ocasiones, factorizar nos permite trabajar con multiplicaciones en vez de sumas y restas.

Finalmente, Factorizar Polinomios nos mantienen ocupados por un largo rato... **Existen varios métodos de Factorización, entre los cuales hay un caso especial, que acá estudiaremos**:

1)	**Primer Caso:**	Factor Común.
2)	**Segundo Caso:**	Factor Común en Grupos.
3)	**Tercer Caso:**	Trinomio Cuadrado Perfecto.
4)	**Cuarto Caso:**	Cuatrinomio Cubo Perfecto.
5)	**Quinto Caso:**	Diferencia de Cuadrados.
6)	**Sexto Caso:**	Sumas o Restas de Potencias de Igual Grado.
7)	**Método de Gauss**	**Factoreo.**

De todos estos casos, en esta guía estudiaremos el Cuarto Caso: **Cuatrinomio Cubo Perfecto**.
Y es importante destacar, que aunque es muy simple factorizar, lo más importante es comprender que, solo la práctica nos permitirá reconocer cuando estamos en presencia de un caso u otro, en consecuencia, identificar que procedimiento aplicar.

ESTO HAY QUE RECORDARLO.



CUARTO CASO: CUATRINOMIO CUBO PERFECTO

Videos Recomendados	
Video 01	https://youtu.be/OVtLJiebApk
Video 02	https://youtu.be/9ri5dwV2K6E
Video 03	https://youtu.be/wzrXsxX-7pw

Breve Repaso: **El Triangulo de Pascal.**

En las matemáticas, el triángulo de Pascal es una representación de los coeficientes binomiales ordenados en forma de triángulo. Es llamado así en honor al filósofo y matemático francés Blaise Pascal, quien introdujo esta notación en 1654, en su **Traité du triangle arithmétique..**

Si bien las propiedades y aplicaciones del triángulo fueron conocidas con anterioridad al tratado de Pascal por matemáticos indios, chinos, persas, alemanes e italianos, fue Pascal quien desarrolló muchas de sus aplicaciones y el primero en organizar la información de manera conjunta. El triángulo de Pascal se puede generalizar a dimensiones mayores. La versión de tres dimensiones se llama pirámide de Pascal o tetraedro de Pascal, mientras que las versiones más generales son llamadas simplex de Pascal

-o-

Fila 00	1	→	$(a+b)^0 = 1$
Fila 01	1 1	→	$(a+b)^1 = 1a^1 + 1b^1$
Fila 02	1 2 1	→	$(a+b)^2 = 1a^2 + 2a^1b^1 + 1b^2$
Fila 03	1 3 3 1	→	$(a+b)^3 = 1a^3 + 3a^2b^1 + 3a^1b^2 + 1b^3$
Fila 04	1 4 6 4 1	→	$(a+b)^4 = 1a^4 + 4a^3b^1 + 6a^2b^2 + 4a^1b^3 + 1b^4$
Fila 05	1 5 10 10 5 1	→	$(a+b)^5 = 1a^5 + 5a^4b^1 + 10a^3b^2 + 10a^2b^3 + 5a^1b^4 + 1b^5$

Para Nuestro caso de estudio "CUATRINOMIO **CUBO** PERFECTO" usaremos las Tercera Fila

Y que debo Hacer?

Continuemos entonces. Para resolver este caso, debemos buscar que los términos cumplan la siguiente condición:

El Cubo del Primero ± el triple del cuadrado del Primero por el segundo ± el triple del Primero por el Cuadrado del Segundo + el Cubo del Segundo

CUBO DEL BINOMIO

$$(a+b)^3 = a^3 + 3a^2b + 3ab^2 + b^3$$
$$(a-b)^3 = a^3 - 3a^2b + 3ab^2 - b^3$$

Y luego el polinomio de un "**Cuatrinomio de cubo perfecto**", se expresa como la suma o resta de sus bases, elevadas al cubo. Un ejemplo muy simple

$x^3 + 3x^2 + 3x + 1$ **Te muestro como resolver sin mucha explicación** R: **$(x+1)^3$**

Ecuación Original									=	Ecuación Factorizada
x^3	+	$3x^2$	+	$3x$	+	1			=	$(x+1)^3$
Miembros de la Ecuación y condiciones										Las bases son x y 2. Los dos "triple-productos" dan bien ($6x^2$ y 12x). El resultado de la factorización es "la suma de las bases, elevada al cubo".
x						1				
$(x)^3$	+	$3.(x)^2.1$	+	$3.x.(1)^2$	+	$(1)^3$				
$(x)^3$	+	$3.(x)^2.1$		$3.x.1$	+	$(1)^3$				
x^3	+	$3x^2$	+	$3x$	+	1				

¿Cómo Puedo Saber Si Factoricé Correctamente?

Multiplicando los factores que obtuvimos tenemos que poder llegar a la misma expresión de sumas y/o restas de la que partimos. De esta forma estamos haciendo una "**verificación**". Recordemos que al factorizar, estamos obteniendo una expresión equivalente a la original, pero con distinta forma (de multiplicación).

Continuando con el primer ejemplo de Factor Común Por Grupos, hagamos la verificación.

Con el resultado obtenido "**$(x+1)^3$**", debemos realizar la verificación.

Desarrollamos el cubo de un binomio, ya sea con la formula obtenida de la tercera fila del Triangulo de Pascal, o multiplicando sus Factores **$(x+1).(x+1).(x+1)$**
Y al obtener como resultado, el ejercicio original, podremos estar seguros que hemos factorizado bien.

Video Recomendado	
Multiplicación de Binomios	https://youtu.be/WsLxwEHznvE

1) Factorear los siguientes polinomios y verifica que todos estén correctamente resueltos. Siempre escribe claramente en tu carpeta, todos los pasos necesarios para llegar al resultado. **Presta atención**, que hay pequeñas diferencias entre los ejercicios.

Tú deberás realizar la auto corrección de todos los ejercicios, para eso dispones de los resultados.

a) **$x^3 + 6x^2 + 12x + 8$** R: **$(x+2)^3$**

Ecuación Original							=	Ecuación Factorizada
x^3	+	$6x^2$	+	$12x$	+	8	=	$(x+2)^3$
Miembros de la Ecuación y condiciones								
x						2		
$(x)^3$	+	$3.(x)^2.2$	+	$3.x.(2)^2$	+	$(2)^3$		
$(x)^3$	+	$3.(x)^2.2$	+	$3.x.4$	+	$(2)^3$		
x^3	+	$6x^2$	+	$12x$	+	8		

b) $x^3 + 18x^2 + 108x + 216$ R: $(x+6)^3$

c) $\frac{1}{9}x^4 + \frac{4}{3}x^2 + 4$

<u>Despacio, este ejercicio esta colado.</u>
Acá describo los pasos a seguir.

R: $\frac{1}{9}\left(x^2+6\right)^2$

- Encierra entre paréntesis todo el polinomio.
- Multiplica el polinomio por nueve novenos (esto no lo modifica, solo nos permitirá cambiar la forma).
- Aplica la propiedad distributiva con el denominador, dejando afuera del paréntesis solo un noveno. El polinomio quedara así:

$$\frac{1}{9}\left(\frac{9}{9}x^4 + \frac{36}{3}x^2 + 36\right)$$

- Simplifica todas las fracciones que puedas.
- Si prestas atención.. Ahora puedes factorizar todo lo que esta dentro del paréntesis usando el tercer caso.
- Y si todo quedó bien resulto, ya tienes el resultado a la vista.

d) $\mathbf{x^3 - 9x^2 + 27x - 27}$

<u>Cuidado</u> con los términos negativos

R: $\mathbf{(x - 3)^3}$

Las bases son "**x**" y "**-3**", ya que $(-3)^3$ es igual a -27. Entonces queda verificar que los dos "triple-productos" estén correctos. El resultado es $(x + (-3))^3$, que es igual a $(x - 3)^3$.

Ecuación Original								=	**Ecuación Factorizada**
x^3	-	$9x^2$	+	$27x$	-	27			$(x - 3)^3$

Miembros de la Ecuación y condiciones			
x			-3
$(x)^3$	$+ 3.(x)^2.(-3)$	$+ 3.x.(-3)^2$	$+ (-3)^3$
x^3	$- 9x^2$	$+ 27x$	$- 27$

Prestar atención a los Signos

e) $x^{15} - 6x^{11} + 12x^7 - 8x^3$

R: $\left(x^5 - 2x\right)^3$

f) $\mathbf{-x^3 - 15x^2 -75x - 125}$

R: $\mathbf{(-x - 5)^3}$

Ecuación Original							=	**Ecuación Factorizada**
$-x^3$	-	$15x^2$	-	$75x$	-	125		$\mathbf{(-x - 5)^3}$

Miembros de la Ecuación y condiciones			
-x			-5
$(-x)^3$ +	$+3.(-x)^2.(-5)$	$+3.(-x).(-5)^2$	$+ (-5)^3$
$-x^3$	$- 15x^2$	$- 75x$	$- 125$

Prestar atención a los Signos

g) $x^3 + \frac{3}{2}x^2 + \frac{3}{4}x - \frac{1}{8}$

Un Poco de Fracciones. Verifica si las bases son "**x**" y "**1/2**", ya que $(\mathbf{1/2})^3$ es igual a **1/8**.

R: $\mathbf{(x + 1/2)^3}$

Ecuación Original							=	**Ecuación Factorizada**
x^3	+	$3/2\ x^2$	+	$3/4\ x$	+	$1/8$		$\mathbf{(x + 1/2)^3}$

Miembros de la Ecuación y condiciones			
x			1/2
$(x)^3$	$+ 3.x^2. (1/2)$	$+ 3.x.(1/2)^2$	$+ (1/2)^3$
x^3	$+ 3/2\ x^2$	$+ 3/4\ x$	$+ 1/8$

Prestar atención a los Signos

h) $\mathbf{64x^3 + 144x^2 + 108x + 27}$ **Cuidado..!!** R: $\mathbf{(4x + 3)^3}$

Las bases son 4x y 3. Porque $(4x)^3$ es igual a $64x^3$, y 3^3 es igual a 27. El número que multiplica a la x^3 debe ser también un cubo para que todo el término sea cubo. Y el 64 es cubo de 4.

Ecuación Original				=	Ecuación Factorizada
$64x^3$ +	$144x^2$ +	$108x$ +	27	=	$\mathbf{(4x + 3)^3}$
Miembros de la Ecuación y condiciones					
4x			3		Prestar atención a los Signos
$(4x)^3$	$+ 3.(4x)^2.3$	$+ 3.4x.3^2$	$+ (3)^3$		
64x	$+ 144x^2$	$+ 108x$	+ 27		

i) $x^3 - \frac{3}{2}x^2 + \frac{3}{4}x - \frac{1}{8}$ R: $\left(x - \frac{1}{2}\right)^3$

j) $\frac{1}{8}x^3 - \frac{9}{8}x^2 + \frac{27}{8}x - \frac{27}{8}$ R: $\left(\frac{1}{2}x - \frac{3}{2}\right)^3$

k) $-x^3 - 9x^2 - 27x - 27$ En este hay que aplicar dos casos de Factoreo. R: $-(x + 3)^3$

l) $\mathbf{a^3b^3 + 3a^2b^2x^2 + 3abx^2 + x^3}$ **Y Ahora?**  R: $\mathbf{(ab + x)^3}$

Las bases son ab y x. Ya que $(ab)^3$ es igual a a^3b^3. Para que un producto sea cubo, ambos factores deben ser cubos.

Ecuación Original				=	Ecuación Factorizada
a^3b^3 +	$3a^2b^2x$ +	$3abx^2$ +	x^3	=	$\mathbf{(ab + x)^3}$
Miembros de la Ecuación y condiciones					
ab			x		Prestar atención a los Signos
$(ab)^3$	$+ 3.(ab)^2.x$	$+ 3.ab.(x)^2$	$(x)^3$		
a^3b^3	$+ 3a^2b^2x$	$+ 3abx^2$	x^3		

m) $\mathbf{x^6 + 6x^4 + 12x^2 + 8}$ **Una Ayudita:** Las bases son x^2 y 2, ya que $(x^2)^3$ es igual a x^6 y 2^3 es 8. R: 

Ecuación Original				=	Ecuación Factorizada
x^6 +	$6x^4$ +	$12x^2$ +	8	=	$\mathbf{(x^2 + 2)^3}$
Miembros de la Ecuación y condiciones					
x^2			2		Prestar atención a los Signos
$(x^2)^3$	$+ 3.(x^2)^2.2$	$+ 3.x^2.2^2$	$+ (2)^3$		
x^6	$+ 6x^4$	$+ 12x^2$	+ 8		

n) $\frac{27}{8}x^3 - \frac{27}{2}x^2 + 18x - 8$ R: $\left(\frac{3}{2}x - 2\right)^3$

o) $8x^3 - 4x^2 + \frac{2}{3}x - \frac{1}{27}$ Solo debes encontrar el primer y segundo elemento. Luego sigue los pasos normales. R: $\left(2x - \frac{1}{3}\right)^3$

p) $5x^3 + 6\sqrt[3]{25}\,x^2 + 12\sqrt[3]{5}\,x + 8$ **Trampa, trampa, cuidado!** R: $\left(\sqrt[3]{5}x+2\right)^3$

El 5 no es cubo de ningún número racional, pero hay que tomarlo como cubo si se quiere factorizar este polinomio. Se puede hacer esto porque 5 en realidad sí es cubo de $\left(\sqrt[3]{5}\right)^3$, ya que $\left(\sqrt[3]{5}\right)^3 = 5$

Ecuación Original					Ecuación Factorizada
$5x^3$	$+ 6\sqrt[3]{5^2}x^2$	$+ 12\sqrt[3]{5}x$	$+ 8$	=	$\left(\sqrt[3]{5}x+2\right)^3$
Miembros de la Ecuación y condiciones					
$\sqrt[3]{5}x$			2		Prestar atención a los Signos
$\left(\sqrt[3]{5}x\right)^3$	$3\left(\sqrt[3]{5}x\right)^2 2$	$3\sqrt[3]{5}2^2$	$(2)^3$		
$5x^3$	$6\sqrt[3]{5^2}x^2$	$12\sqrt[3]{5}x$	8		

q) $x^6 - 3\sqrt{3}\,x^4 + 9x^2 - 3\sqrt{3}$

Solo debes encontrar el primer y segundo elemento. Te dejo otra ayuda. Piensa.

$\sqrt{3} \times \sqrt{3} \times \sqrt{3} = \left(\sqrt{3}\right)^2 \times \sqrt{3}$

R: $\left(x^2 - \sqrt{3}\right)^3$

r) $x - 6\sqrt[3]{x^2} + 12\sqrt[3]{x} - 8$ R: $\left(\sqrt[3]{x} - 2\right)^3$

s) $\frac{27}{64}x^3 + \frac{27}{16}x^2 + \frac{9}{4}x + 1$ **Un Ejercicio para pensar..** R: $\frac{1}{64} \times \left(3x+4\right)^3$

Para resolver este ejercicio, primero multiplica y divide todo el polinomio por 64/64. A continuación aplicas distributiva solo con el numerador (factor común 1/64). Simplificas las fracciones todo lo que puedas, y entonces encuentras el primer y segundo elemento. Si todo está bien ya casi lo resolviste, solo queda factorizar. Si haces la comprobación terminaras de comprende que se hizo.

t) $\frac{3}{4}x^4y^2 - \frac{1}{8}x^6y^3 + 1 - \frac{3}{2}x^2y$ Acá tenemos un desafío! R: $\left(-\frac{1}{2}X^2Y + 1\right)^3$

Varias Bases distintas, potencias distintas de 3, fracciones, términos negativos, el número "1"; y además está "desordenado". En lo que debes fijar tu atención, es en las bases, ya que ellas tendrán los exponentes más grandes, entonces encontramos que son "**-1/2 x^2y**", y "**1**". Ya que $(-1/2\ x^2y)^3$ es igual a $-1/8\ x^6y^3$; y 1^3 es igual a 1.

Ecuación Original					Ecuación Factorizada
$3/4\ x^4y^2$	$- 1/8\ x^6y^3$	$+ 1$	$- 3/2\ x^2y$	=	$(-1/2\ x^2y + 1)^3$
Miembros de la Ecuación y condiciones					
	$- 1/2\ x^2y$	$+ 1$			Prestar atención a los Signos
$3.(-1/2\ x^2y)^2 \cdot 1$	$+ (-1/2\ x^2y)^3$	$+ (1)^3$	$+ 3.(- 1/2\ x^2y).1^2$		
$3/4\ x^4y^2$	$- 1/8\ x^6y^3$	$+ 1$	$- 3/2\ x^2y$