



# Regla de Ruffini

(Resumen: Castelli Horacio P.)



Para todos los ejercicios, debes escribir el enunciado, y el ejercicio propuesto en tu carpeta, también deberás realizar y escribir claramente todos los pasos necesarios para llegar al resultado.

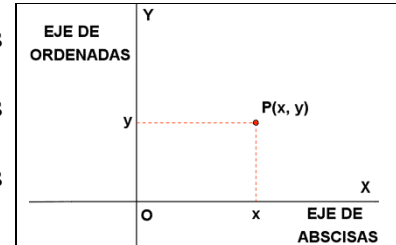
Queda a cargo del alumno hacer la auto corrección de todos los ejercicios, para eso dispone del resultado en todos los casos.

Los ejercicios resueltos, están para que el alumno los analice y entienda el procedimiento.

## REPASEMOS ALGUNOS CONCEPTOS Y PROCEDIMIENTOS

### Un Punto

- ✓ Todo punto en el plano esta definido por dos valores llamados coordenada, (x,y).
- ✓ La "x" representa el desplazamiento del punto en el eje de las abscisas, o "eje x" (Desplazamiento de izquierda a derecha).
- ✓ La "y" representa el desplazamiento del punto en el eje de las ordenadas o "eje y" (Desplazamiento Vertical).



### Valor Numérico de un Polinomio

Evaluar o calcular el valor numérico de un polinomio consiste en determinar qué valor toma el polinomio cuando la variable (x) se sustituye por un número concreto.

### Videos Recomendados

Evaluar o calculo del valor numérico de un Polinomio <https://youtu.be/UtKbXTUMGnQ>

Como ejemplo consideramos el polinomio  $P(x) = x^3 - 3x + 5$  y queremos calcular, cual será el valor (resultado) cuando la variable "x" tome el valor 2 (dos).

Evaluar el polinomio en 2, consiste en sustituir la variable por 2 ( es decir  $x=2$ ).

Reemplazamos "x" por el valor 2:

$$P(2) = (2)^3 - 3(2) + 5$$

Resolvemos y.....

$$P(2) = 8 - 6 + 5$$

El Valor del Polinomio evaluado será:

$$P(2) = 7$$

**Muy Importante:** Esto también debemos entenderlo como, el valor que toma la variable "y" cuando "x" asume un valor determinado.

### Raíz o Cero de un Polinomio

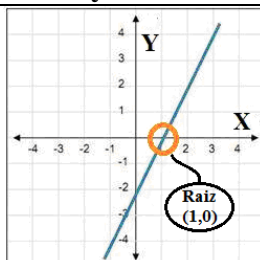
Este es un concepto que ya vimos antes, pero en momentos y situaciones distintas y aunque siempre se identifica a la misma cosa como raíz, debemos comprender que la raíz es:

Cuando Graficamos: valor de "x", donde la gráfica de la función, corta o toca (rebota) al eje de las abscisas (eje x).

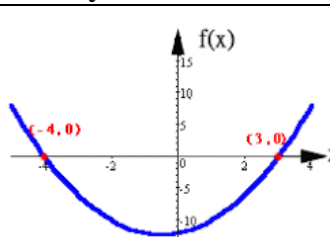
El valor de "x", que al evaluar el polinomio (Valor Numérico de un Polinomio), nos da como resultado 0 (cero).

### El valor de "x" que hace que "y" sea igual a 0 (cero)

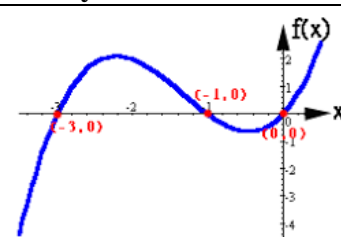
$$y = x - 2$$



$$y = x^2 + x - 12$$



$$y = x^3 + 4x^2 + 3x$$

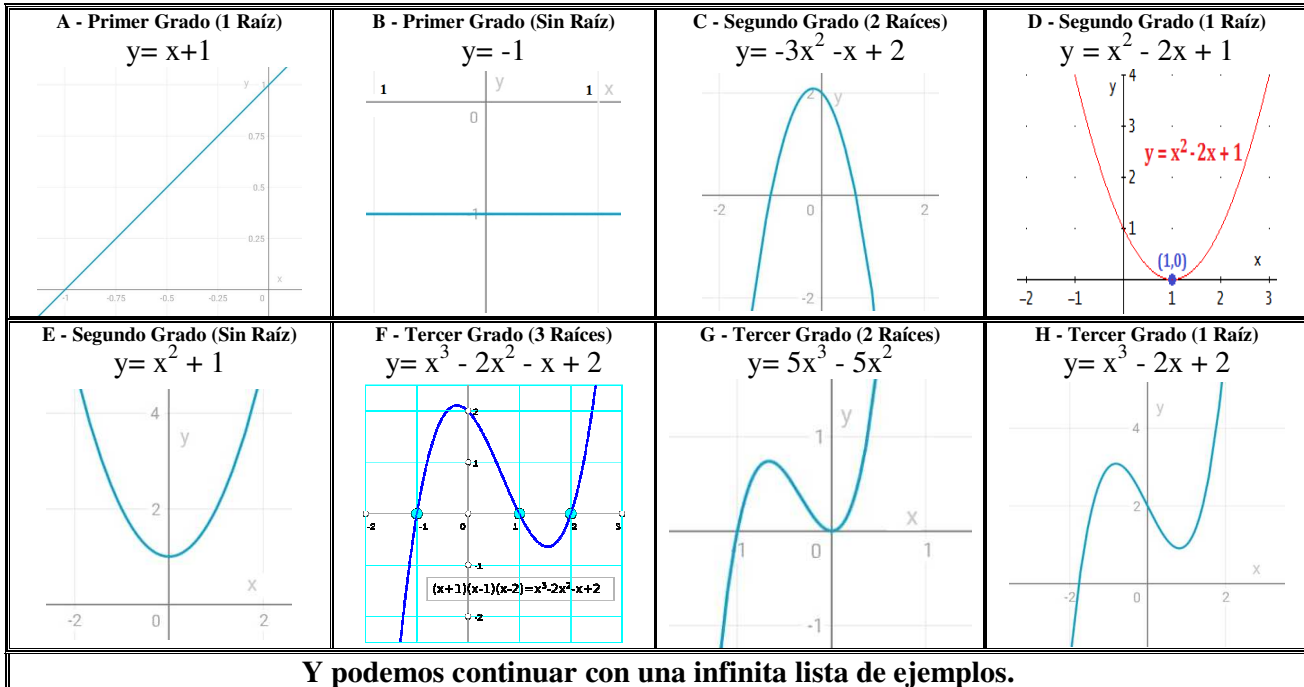


Note que en todas las raíces, "y" es igual a cero

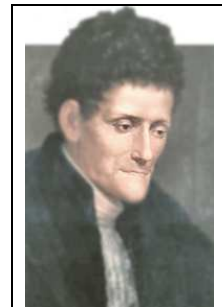


## Cuántas Raíces Tiene un Polinomio?

El grado del polinomio, nos indica la cantidad MÁXIMA de raíces que puede tener el polinomio con el que estamos trabajando. Aunque en ocasiones, algunas raíces no son reales y no las podremos graficar. Entonces por ahora, asumiremos que no existen o que se encuentran superpuestas con otras que si vemos. Veamos algunos ejemplos y sus gráficos:



**Paolo Ruffini (1765, 1822)**, fue un matemático filósofo y médico italiano que, estableció un método más simple y breve para dividir polinomios, **cuando el divisor es un binomio de la forma  $(x - a)$** . Este método o algoritmo, nos permite obtener las raíces (o ceros) de un polinomio y resulta de gran utilidad, ya que para polinomios (funciones) con grados mayores que 2, no disponemos de fórmulas o procedimientos, o son muy largos y complicados al momento de aplicar.



## Método de Ruffini

Como antes se había mencionado, este es un método o algoritmo que nos permite obtener las raíces o ceros de un polinomio. Si bien hay que probar hasta encontrar el valor (raíz o cero), este método es muy fácil, simple y rápido de aplicar. Una cosa a tener en cuenta, es que este método, no siempre nos permitirá encontrar las raíces de un polinomio. En ocasiones solo podremos encontrar algunas y en otras ocasiones, ninguna ya que las raíces no se pueden expresar como  $(x-a)$  o el polinomio directamente no tiene raíces.



Para aplicar la regla de Ruffini, debemos seguir los siguientes pasos.

- Ordena el polinomio en orden Descendente por el exponente.
- Completa los términos faltantes con ceros.
- Copiamos los coeficientes del dividendo en una línea, de izquierda a derecha.
- Preparamos para comenzar a trabajar, trazamos las líneas guías y buscamos los divisores del termino independiente.

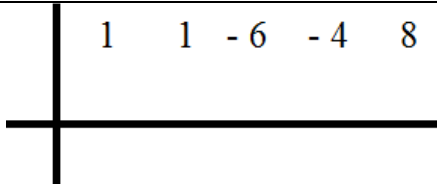
**Pero mejor veamos todo esto con un ejemplo:**

Encontrar las raíces del polinomio  $P(x) = -4x + x^3 + 8 - 6x^2 + x^4$  se pide encontrar las raíces.

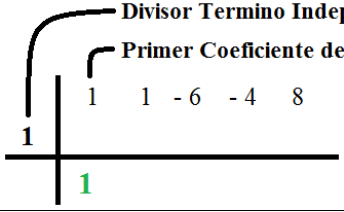
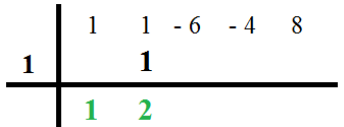
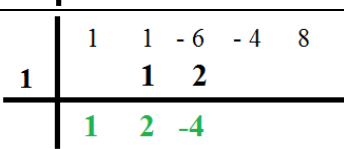
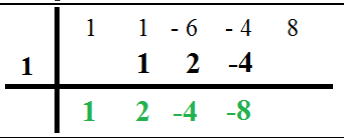
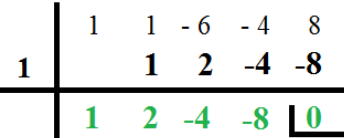


# Regla de Ruffini

(Resumen: Castelli Horacio P.)

a)	Ordenamos Polinomio	$x^4 + x^3 - 6x^2 - 4x + 8$
b)	Completa los términos faltantes con ceros.	Ya esta completo, queda igual
c)	Copiamos los coeficientes del dividendo en una línea, de izquierda a derecha.	1 1 - 6 - 4 8
d)	Preparamos para comenzar a trabajar.	 <p>Los divisores del termino independiente son: <b>1, -1, 2, -2, 4, -4, 8 y -8</b></p>

**Ahora aplicaremos el algoritmo o método**, presta atención, lo resolveremos y explicaremos paso a paso. Cada divisor del término independiente es un posible factor (o divisor) del polinomio, y este factor (o divisor) del polinomio será un binomio con la forma  $(x - a)$ , donde "a" es uno de los divisores del término independiente que encontramos en el punto "d".

		Divisor	Termino Independiente
1)	Tomamos el primer divisor del término independiente, para nuestro ejemplo, será el 1 (uno), y lo colocamos a la izquierda (como en la imagen), luego bajamos el primer coeficiente del polinomio (como en la imagen) y COMENZAMOS.	1	
2)	Multiplicamos el divisor con el coeficiente y al resultado lo ponemos debajo del segundo coeficiente, ahora sumamos el coeficiente y el resultado de la división $(1+1 = 2)$ y obtenemos como resultado 2.	1	
3)	Repetimos el proceso anterior. Multiplicamos el divisor por el resultado de la suma, (es decir $1 \times 2 = 2$ ), y lo colocamos debajo del tercer coeficiente (-6), a continuación, sumamos el coeficiente con el resultado de la multiplicación $(-6 + 2 = -4)$ . Resultando -4	1	
4)	Nuevamente repetimos el procedimiento, y hasta terminar	1	
5)	En este paso llegamos al último coeficiente del polinomio y obtenemos un cero, esto quiere decir que el procedimiento tiene un resultado exacto. Entre otras cosas, quiere decir que este divisor es uno de los que estamos buscando.	1	

**Interpretemos los resultados:** Al usar este método, con el "1" (primer divisor del término independiente que habíamos encontrado), el procedimiento termina con 0 (cero). Esto significa que ya tenemos la primera raíz, y con ella construiremos el primer factor o divisor del polinomio. Este factor encontrado, podrá ser escrito como  $(x - 1)$ .

Explicado de otra forma, el Factor o Divisor que construimos, debe ser escrito como "**x**" más la raíz encontrada cambiada de signo. Como la raíz encontrada es 1 (uno) entonces es  $(x + (-1))$  y esto queda como  $(x - 1)$ .



Solo Falta comprobar si la raíz encontrada es correcta y para esto, solo debemos encontrar el valor numérico del polinomio para "**x = Raíz**". Recuerda que la raíz, es un cero de la función.



# Regla de Ruffini

(Resumen: Castelli Horacio P.)

$$P(x) = x^4 + x^3 - 6x^2 - 4x + 8$$

$$P(1) = (1)^4 + (1)^3 - 6(1)^2 - 4(1) + 8 =$$

$$P(1) = 1 + 1 - 6 - 4 + 8 = 0 \text{ (cero)}$$

Con esto, podemos afirmar que la raíz encontrada con Ruffini es correcta.

Y los otros valores obtenidos (los resultados de cada una de las sumas, excluyendo el último cero) representan los coeficientes de un polinomio de grado menor que el original, que comenzando a interpretar de derecha a izquierda, "-8" será el término independiente, etc.

Reconstruyendo el polinomio resultante, queda:  $x^3 + 2x^2 - 4x - 8$

	1	1	-6	-4	8
1		1	2	-4	-8
	1	2	-4	-8	0

Estos Valores


## Y todo esto, que quiere decir?

Si hubiéramos realizado una división de polinomios como las que estudiamos antes, en la que el dividendo es el polinomio original, el divisor será el factor que construimos con la raíz (x-1) y el cociente, será el polinomio que construimos con los números que resultaron de cada suma, excluyendo el último cero (que como ya se dijo, será nuestro resto). Entonces la división es exacta.

### Datos y Resultados Obtenidos con el Método de Ruffini

Polinomio Original (Dividendo)	$x^4 + x^3 - 6x^2 - 4x + 8$
Binomio (Factor) construido con la Raíz encontrada (Divisor)	$(x - 1)$
Polinomio construido con los Factores resultantes (Cociente)	$x^3 + 2x^2 - 4x - 8$
(Resto)	0

Para entender todo esto mejor, haremos la división de la forma tradicional, y analicemos los resultados.

$\begin{array}{r} x^4 + x^3 - 6x^2 - 4x + 8 \\ -x^4 + x^3 \\ \hline \text{----} +2x^3 - 6x^2 \\ \quad -2x^3 + 2x^2 \\ \hline \text{-----} -4x^2 - 4x \\ \qquad +4x^2 - 4x \\ \hline \text{-----} -8x + 8 \\ \qquad \quad +8x - 8 \\ \hline \text{---} \text{---} \end{array}$	$\begin{array}{r} x - 1 \\ x^3 + 2x^2 - 4x - 8 \end{array}$	<p><b>Desglose de los datos y resultados obtenidos con la división</b></p> <p>Dividendo <math>x^4 + x^3 - 6x^2 - 4x + 8</math></p> <p>Divisor <math>(x - 1)</math></p> <p>Cociente <math>x^3 + 2x^2 - 4x - 8</math></p> <p>Resto 0</p> 
---	---	--

Como vemos, los resultados encontrados con el método de Ruffini, son idénticos a los encontrados con la división.

## Y como sigue esto?

Bueno, muy fácil. Teníamos varios factores o divisores del término independiente, ya probamos con 1 y resultado ser una raíz. Probemos con los otros.

**Si no termina en 0 (cero), no es raíz. Entonces descartamos ese valor**

Y cada vez que encontremos una raíz, encontramos también un nuevo Factor o divisor y los coeficientes de un nuevo polinomio más chico que el anterior (original).

Menos palabras y más acción. **Entonces continuamos desde el punto 5, donde nos quedamos.**

6)

Escribimos los coeficientes del polinomio que resulto en la operación anterior, y continuamos con los otros divisores, hasta que encontremos la cantidad de raíces que nos dice el grado del polinomio, o que se nos acaben los divisores del término independiente. Recuerda que siempre debes descartar los divisores que no tienen resto 0 (cero).

Listo, Terminamos ==>

	1	2	-4	-8
2		2	8	8
	1	4	4	0
-2		-2	-4	
	1	2	0	
-2		-2		
	1	0		



# Regla de Ruffini

(Resumen: Castelli Horacio P.)

## Y ahora?

Podemos escribir todos los factores y representar el polinomio original como el producto de sus factores, es decir:

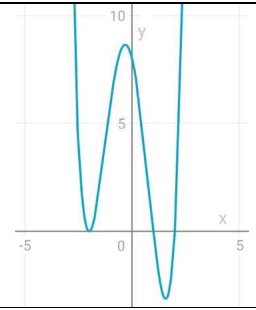
$$P(x) = x^4 + x^3 - 6x^2 - 4x + 8 = (x-1)(x-2)(x+2)(x+2)$$

7)

Y con este simple pero EMOTIVO acto, declaramos que:

**Ya está factorizada la ecuación.**

Y si graficamos, ya tenemos las raíces 1, 2, -2, -2



Recuerda que Ruffini no es perfecto y en ocasiones no podremos encontrar las raíces ya que algunas son compleja, y/o los factores no pueden expresarse de la forma  $(x - a)$ .

## Y si no tiene termino independiente?

Esto es muy simple. Quiere decir que una o varias raíces son igual a 0 (CERO). Usa Ruffini con un cero como si fuera un posible divisor del termino independiente y al completar el polinomio recuerda incluir el termino independiente (que ya acordamos es cero). Aplica Ruffini y te quedará un polinomio de grado menor que el original y resto cero.

Analicemos un ejemplo, donde hay una raíz igual a cero.

Factorizar (encontrar las raíces) del polinomio  $f(x) = x^5 - 5x^3 + 4x$

### Cosas a tener en cuenta:

- 1) No tiene termino independiente, así que primero debemos ordenar y completar, poniendo ceros en los términos que faltan, incluido el término independiente.

Completamos y Ordenamos polinomio.

$$x^5 + 0x^4 - 5x^3 + 0x^2 + 4x + 0$$

2)

Escribimos y preparamos los coeficientes para trabajar. En este caso no hay divisores del termino independiente, pero sabemos de antemano que el 0 (cero) es una posible raíz (porque falta el término independiente)

Posible Raíz						
Primer Coeficiente del Polinomio						
0	1	0	-5	0	4	0
-----						

3)

Aplicamos Ruffini para nuestra posible raíz: 0 (cero).



0	1	0	-5	0	4	0
	0	0	0	0	0	0
-----						
	1	0	-5	0	4	0

Ya tenemos un factor y un polinomio de un grado menor, que podemos seguir descomponiendo por medio de Ruffini.

$$f(x) = (x-0)(x^4 + 0x^3 - 5x^2 + 0x + 4)$$

Es decir ....

4)

$$f(x) = x \cdot (x^4 - 5x^2 + 4)$$

**Dejando de lado como quedo ahora. Nuevamente comencemos desde el principio extrayendo todos los factores.**

0	1	0	-5	0	4	0
	0	0	0	0	0	0
-----						
	1	0	-5	0	4	0
1		1	1	-4	-4	
-----						
	1	1	-4	-4	0	
-1		-1	0	4		
-----						
	1	0	-4	0		
2		2	4			
-----						
	1	2	0			
-2		-2				
-----						
	1	0				

Ahora si tenemos un termino independiente (4 cuatro) y podremos encontrar sus divisores, que son: 1, -1, 2, -2, 4 y -4.

Y probamos y descartamos los que no tienen resto cero.

5)

Luego de encontrar las 4 raíces faltantes, sus raíces son (0, 1, -1, 2, -2), podemos ver que el polinomio factorizado (compuesto por sus factores) es:

$$f(x) = x^5 - 5x^3 + 4x = x \cdot (x-1) \cdot (x+1) \cdot (x-2) \cdot (x+2)$$

Y solo como referencia, para que veas como es la gráfica de este polinomio:

6)

Te das cuenta cual es cada raíz? =====>





## 1) Encontrar los factores de los siguientes polinomios.

Deberás realizar claramente todos los pasos necesarios para llegar al resultado. Tú debes hacer la auto corrección de todos los ejercicios, para eso dispones de los resultados.

a)  $x^4 - 9x^2 + 4x + 12$

R:

$(x+1).(x-2).(x-2).(x+3)$

### Resuelto y sin explicación.

Recordar que el método consiste escoger una posible raíz y desarrollar la tabla.  
Si el último resultado de la tabla es 0, el procedimiento habrá finalizado correctamente. Si no es así, tendremos que probar con otra posible raíz.

	+1	0	-9	+4	+12
-1	↓	-1	+1	+8	-12
	+1	-1	-8	+12	0
+2	↓	+2	+2	-12	
	+1	+1	-6		0
+2	↓	+2	+6		
	+1	+3			0
-3	↓	-3			
	+1				0

b)  $x^3 - 5x^2 - 9x + 45$

R:

$(x - 3)(x + 3)(x - 5)$

c)  $7x^5 - 28x^3 - 7x^2 + 28$

R:

$(x - 2)(x + 2)(x - 1)(7x^2 + 7x + 7)$

En este caso, solo se pueden encontrar 3 de las 5 raíces (las 2 que faltan son imaginarias)

d)  $x^3 - 9x^2 + 26x - 24$

R:

$(x-2).(x-3).(x-4)$

e)  $x^3 + 6x^2 + 11x + 6$

(Resuelto más abajo)

R:

$(x+2).(x+3).(x+1)$

f)  $x^4 - 6x^3 - 11x^2 + 96x - 80$

(Resuelto más abajo)

R:

$(x-1).(x-4).(x+4).(x-5)$

g)  $x^4 - 10x^3 + 35x^2 - 50x + 24$

(Resuelto más abajo)

R:

$(x-2).(x-3).(x-1).(x-4)$

$f(x) = (x^3 + 6x^2 + 11x + 6)$	$f(x) = (x^4 - 6x^3 - 11x^2 + 96x - 80)$	$f(x) = (x^4 - 10x^3 + 35x^2 - 50x + 24)$																																																																																																																																															
<table border="1"> <tr><td></td><td>1</td><td>6</td><td>11</td><td>6</td></tr> <tr><td>-2</td><td>↓</td><td>-2</td><td>-8</td><td>-6</td></tr> <tr><td></td><td>1</td><td>4</td><td>3</td><td>0</td></tr> <tr><td>-3</td><td>↓</td><td>-3</td><td>-3</td><td></td></tr> <tr><td></td><td>1</td><td>1</td><td>0</td><td></td></tr> <tr><td>-1</td><td>↓</td><td>-1</td><td></td><td></td></tr> <tr><td></td><td>1</td><td>0</td><td></td><td></td></tr> </table>		1	6	11	6	-2	↓	-2	-8	-6		1	4	3	0	-3	↓	-3	-3			1	1	0		-1	↓	-1				1	0			<table border="1"> <tr><td></td><td>1</td><td>-6</td><td>-11</td><td>96</td><td>-80</td></tr> <tr><td>1</td><td>↓</td><td>1</td><td>-5</td><td>-16</td><td>80</td></tr> <tr><td></td><td>1</td><td>-5</td><td>-16</td><td>80</td><td>0</td></tr> <tr><td>4</td><td>↓</td><td>4</td><td>-4</td><td>-80</td><td></td></tr> <tr><td></td><td>1</td><td>-1</td><td>-20</td><td>0</td><td></td></tr> <tr><td>-4</td><td>↓</td><td>-4</td><td>20</td><td></td><td></td></tr> <tr><td></td><td>1</td><td>-5</td><td>0</td><td></td><td></td></tr> <tr><td>5</td><td>↓</td><td>5</td><td></td><td></td><td></td></tr> <tr><td></td><td>1</td><td>0</td><td></td><td></td><td></td></tr> </table>		1	-6	-11	96	-80	1	↓	1	-5	-16	80		1	-5	-16	80	0	4	↓	4	-4	-80			1	-1	-20	0		-4	↓	-4	20				1	-5	0			5	↓	5					1	0				<table border="1"> <tr><td></td><td>1</td><td>-10</td><td>35</td><td>-50</td><td>24</td></tr> <tr><td>2</td><td>↓</td><td>2</td><td>-16</td><td>38</td><td>-24</td></tr> <tr><td></td><td>1</td><td>-8</td><td>19</td><td>-12</td><td>0</td></tr> <tr><td>3</td><td>↓</td><td>3</td><td>-15</td><td>12</td><td></td></tr> <tr><td></td><td>1</td><td>-5</td><td>4</td><td>0</td><td></td></tr> <tr><td>1</td><td>↓</td><td>1</td><td>-4</td><td></td><td></td></tr> <tr><td></td><td>1</td><td>-4</td><td>0</td><td></td><td></td></tr> <tr><td>4</td><td>↓</td><td>4</td><td></td><td></td><td></td></tr> <tr><td></td><td>1</td><td>0</td><td></td><td></td><td></td></tr> </table>		1	-10	35	-50	24	2	↓	2	-16	38	-24		1	-8	19	-12	0	3	↓	3	-15	12			1	-5	4	0		1	↓	1	-4				1	-4	0			4	↓	4					1	0			
	1	6	11	6																																																																																																																																													
-2	↓	-2	-8	-6																																																																																																																																													
	1	4	3	0																																																																																																																																													
-3	↓	-3	-3																																																																																																																																														
	1	1	0																																																																																																																																														
-1	↓	-1																																																																																																																																															
	1	0																																																																																																																																															
	1	-6	-11	96	-80																																																																																																																																												
1	↓	1	-5	-16	80																																																																																																																																												
	1	-5	-16	80	0																																																																																																																																												
4	↓	4	-4	-80																																																																																																																																													
	1	-1	-20	0																																																																																																																																													
-4	↓	-4	20																																																																																																																																														
	1	-5	0																																																																																																																																														
5	↓	5																																																																																																																																															
	1	0																																																																																																																																															
	1	-10	35	-50	24																																																																																																																																												
2	↓	2	-16	38	-24																																																																																																																																												
	1	-8	19	-12	0																																																																																																																																												
3	↓	3	-15	12																																																																																																																																													
	1	-5	4	0																																																																																																																																													
1	↓	1	-4																																																																																																																																														
	1	-4	0																																																																																																																																														
4	↓	4																																																																																																																																															
	1	0																																																																																																																																															

